

جنبه‌هایی از گرانش کوانتومی در سه بعد

حسین محمدی

استاد راهنما:

امین فرجی آستانه

دانشگاه صنعتی شریف



۲۰ آذرماه ۱۴۰۳

- ۱ نقشه‌ی راه
- ۲ تابع پارش گرانث سه‌بعدی
- ۳ تابع پارش گرانث سه‌بعدی (نسخه‌ی متنی)
 - بیان انگیزه‌ها و روش‌ها
 - سهم کلاسیک به تابع پارش
 - شناخت هندسی و اهمیت فیزیکی این سهم‌ها
 - محاسبه‌ی تابع پارش
 - صورت نهایی تابع پارش تک حلقه و تعبیر آن
 - پیشامدهای احتمالی
- ۴ نتیجه‌گیری و مسیرهای آینده
- ۵ تقدیر و سپاس‌گزاری
- ۶ ضمیمه‌ی اول: تقارن‌های مجانبی گرانث سه‌بعدی پاددوسیته‌ی خالص
 - هندسه و تبدیلات طول‌پای فضای مجانباً پاددوسیته
 - معرفی شرایط مرزی Brown-Henneaux
 - بردارهای کیلینگ منسوب به شرط Brown-Henneaux

- جبر بردارهای کیلینگ مجانبی و گروه تقارنی مجانبی
- رهیافت‌های بدیل و نکات
- نگاهی به تقارن‌های مجانبی فضای مجانباً تخت

۷ ضمیمه‌ی دوم: یک رهیافت به اصلاح نقایص طیف

- ایده‌هایی از بوتسترپ همدیس
- افزودن سهم‌های تکینه‌ی مخروطی

۸ مراجع

نقشه‌ی راه

اول از همه ممنونم که اینجا هستید.

چارچوبِ کلیِ ارائه‌ی من به این شکل هست.

۱ تابع پارش گرانث سه‌بعدی و نقایص آن.

۲ ضمیمه: تقارن‌های مجانبیِ فضا‌زمان‌های مجانباً پاددوسیه $\longleftrightarrow$ نظریه‌ی میدان‌های

همدیس [۱].

۳ ضمیمه: راهکارهای اصلاحِ نقصِ طیف.

اول از همه ممنونم که اینجا هستید.

چارچوبِ کلیِ ارائه‌ی من به این شکل هست.

۱ تابع پارش گرانث سه‌بعدی و نقایص آن.

۲ ضمیمه: تقارن‌های مجانبیِ فضا‌زمان‌های مجانباً پاددوسیه $\longleftrightarrow$ نظریه‌ی میدان‌های همدیس [۱].

۳ ضمیمه: راهکارهای اصلاحِ نقصِ طیف.

اول از همه ممنونم که اینجا هستید.

چارچوبِ کلیِ ارائه‌ی من به این شکل هست.

۱ تابع پارش گرانث سه‌بعدی و نقایص آن.

۲ ضمیمه: تقارن‌های مجانبیِ فضا‌زمان‌های مجانباً پاددوسیه $\longleftrightarrow$ نظریه‌ی میدان‌های

همدیس [۱].

۳ ضمیمه: راهکارهای اصلاحِ نقصِ طیف.

اول از همه ممنونم که اینجا هستید.

چارچوبِ کلیِ ارائه‌ی من به این شکل هست.

❶ تابع پارش گرانث سه‌بعدی و نقایص آن.

❷ ضمیمه: تقارن‌های مجانبیِ فضا‌زمان‌های مجانباً پاددوسیه $\rightarrow$ نظریه‌ی میدان‌های همدیس [۱].

❸ ضمیمه: راهکارهای اصلاحِ نقصِ طیف.

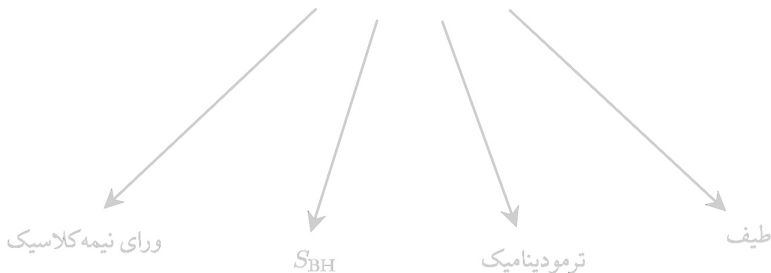
- ◀ دورنمای کلی از گرانشِ کوانتومی سه‌بعدی در فضای مجانباً پاددوسیته: از آغاز تا پیشرفت‌های اخیر.
- ◀ مدلِ گرانشی حل‌پذیر دوبعدی ← گرانشِ JT با آن‌همه دستاوردها ([۲، ۳]).
- ◀ پاسخگویی به سوالات و ابهامات در پایانِ ارائه

- ◀ دورنمای کلی از گرانشِ کوانتومی سه‌بعدی در فضای مجانباً پاددوسیته: از آغاز تا پیشرفت‌های اخیر.
- ◀ مدلِ گرانشی حل‌پذیرِ دوبعدی ← گرانشِ JT با آن‌همه دستاوردها ([۲، ۳]).
- ◀ پاسخگویی به سوالات و ابهامات در پایانِ ارائه

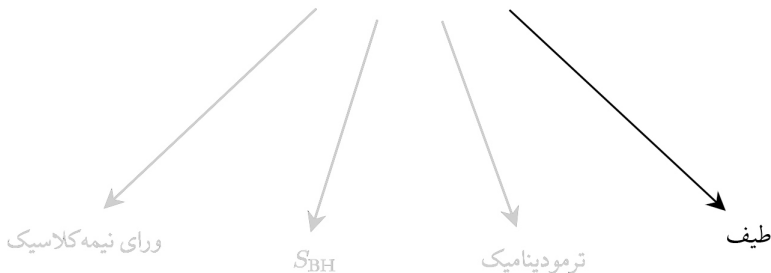
- ▶ دورنمای کلی از گرانشِ کوانتومی سه‌بعدی در فضای مجانباً پاددوسیته: از آغاز تا پیشرفت‌های اخیر.
- ▶ مدلِ گرانشی حل‌پذیرِ دوبعدی $\leftarrow$ گرانشِ JT با آن‌همه دستاوردها ([۲، ۳]).
- ▶ پاسخگویی به سوالات و ابهامات در پایانِ ارائه

تابع پارش گرانش سه بعدی

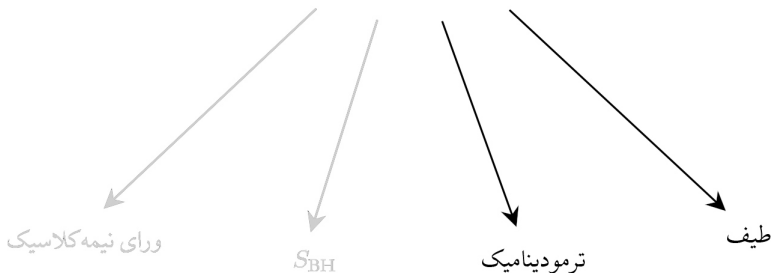
$$\mathcal{Z} = \sum_i \rho_i e^{-\beta E_i}$$



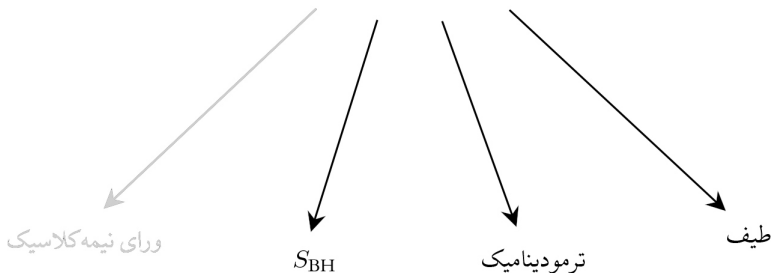
$$\mathcal{Z} = \sum_i \rho_i e^{-\beta E_i}$$



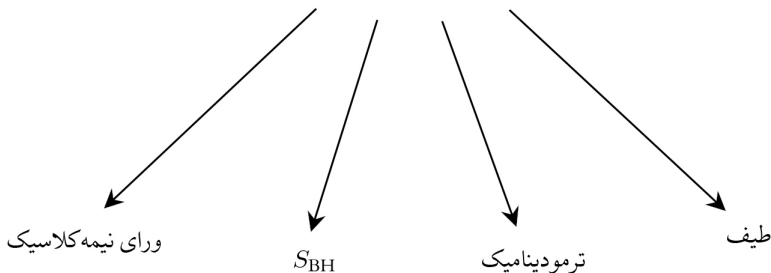
$$\mathcal{Z} = \sum_i \rho_i e^{-\beta E_i}$$

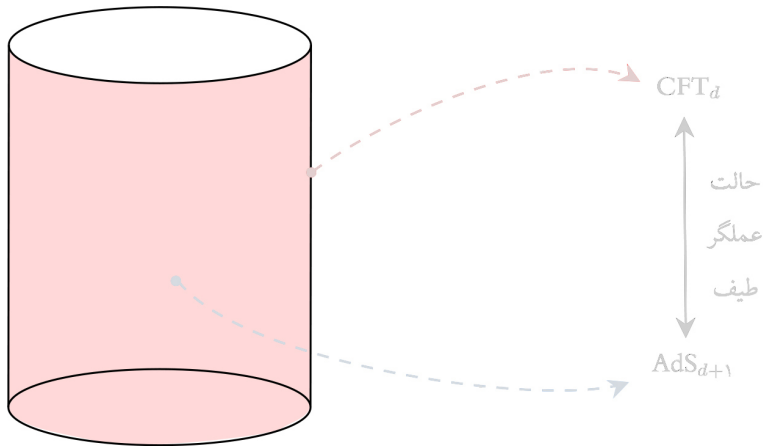


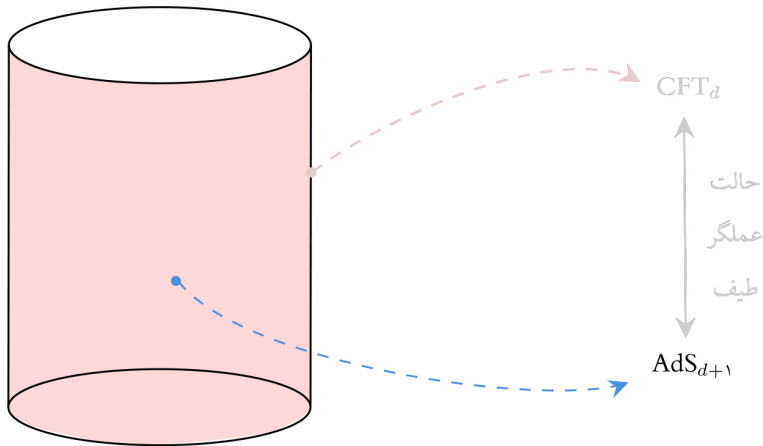
$$\mathcal{Z} = \sum_i \rho_i e^{-\beta E_i}$$

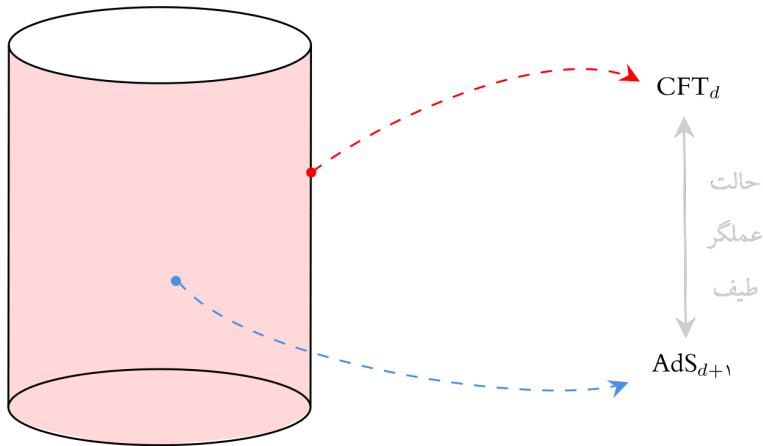


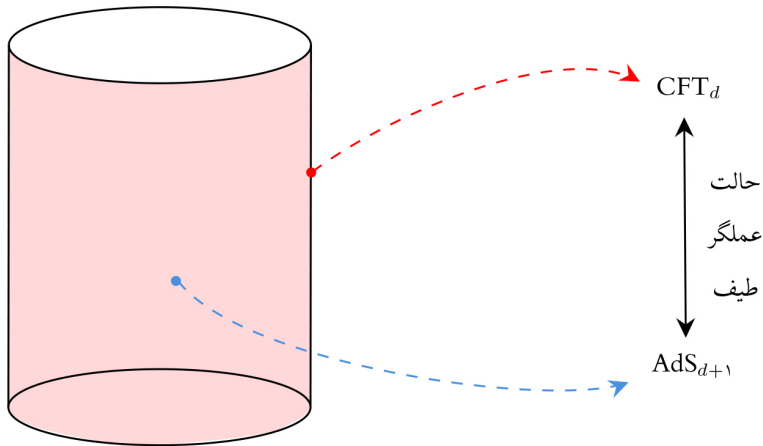
$$\mathcal{Z} = \sum_i \rho_i e^{-\beta E_i}$$











$$\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}g] e^{-I[g]}$$

$I_{\text{EH}} + I_{\text{GHY}}$



● تقریبِ زینی

● $\delta I \neq 0$

● اثراتِ غیر اختلالی

$$\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}g] e^{-I[g]}$$

$I_{\text{EH}} + I_{\text{GHY}}$

● تقریبِ زینی



● $\delta I \neq 0$

● اثراتِ غیرِ اختلالی

$$\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}g] e^{-I[g]}$$

$I_{\text{EH}} + I_{\text{GHY}}$



● تقریبِ زینی

● $\delta I \neq 0$

● اثراتِ غیر اختلالی

$$\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}g] e^{-I[g]}$$

$I_{\text{EH}} + I_{\text{GHY}}$



● تقریبِ زینی

● $\delta I \neq 0$

● اثراتِ غیر اختلالی

❶ ساخت جوابهای کلاسیک چنبره‌ای

❷ تقریبِ خام تابع پارش

❸ تناظر عجیب با نظریه‌های همدیس

❹ تابع پارش کامل و طیف

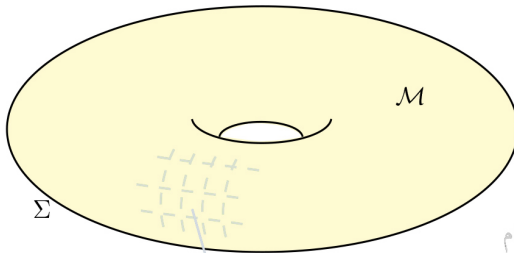
❺ نقایصِ طیف و راه‌حل‌های احتمالی

- ❶ ساخت جوابهای کلاسیک چنبره‌ای
- ❷ تقریبِ خام تابع پارش
- ❸ تناظر عجیب با نظریه‌های همدیس
- ❹ تابع پارش کامل و طیف
- ❺ نقایصِ طیف و راه‌حل‌های احتمالی

- ❶ ساخت جوابهای کلاسیک چنبره‌ای
- ❷ تقریبِ خام تابع پارش
- ❸ تناظر عجیب با نظریه‌های همدیس
- ❹ تابع پارش کامل و طیف
- ❺ نقایصِ طیف و راه‌حل‌های احتمالی

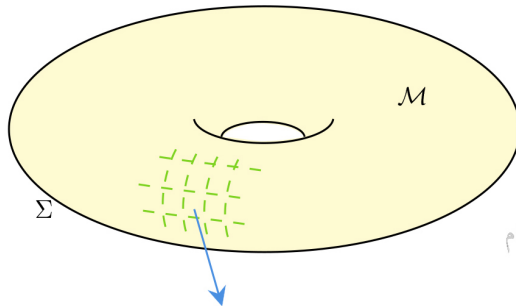
- ۱ ساخت جوابهای کلاسیک چنبره‌ای
- ۲ تقریبِ خام تابع پارش
- ۳ تناظر عجیب با نظریه‌های همدیس
- ۴ تابع پارش کامل و طیف
- ۵ نقایصِ طیف و راه‌حل‌های احتمالی

- ❶ ساخت جوابهای کلاسیک چنبره‌ای
- ❷ تقریبِ خام تابع پارش
- ❸ تناظر عجیب با نظریه‌های همدیس
- ❹ تابع پارش کامل و طیف
- ❺ نقایصِ طیف و راه‌حل‌های احتمالی



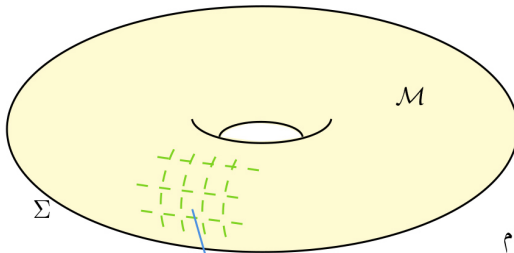
فرض‌های معقولِ نسبیت عام

$$ds^2 = |dz|^2$$



فرض‌های معقولِ نسبیت عام

$$ds^2 = |dz|^2$$



فرض‌های معقولِ نسبیت عام

$$ds^2 = |dz|^2$$

دسته‌بندی فضا زمان‌های کلاسیک

$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$ بدون درجه‌ی آزادی ← بدون گراویتون

هر خمینه‌ی اینشتینی AdS_3 diff



ناحیه‌ای از پاددوسیه $\frac{\text{AdS}'_3}{\Gamma}$ ← زیرگروه خودریختی‌ها

بدون $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ درجه‌ی آزادی ← بدون گراویتون

هر خمینه‌ی اینشتینی $\stackrel{\text{diff}}{\sim}$ AdS_3



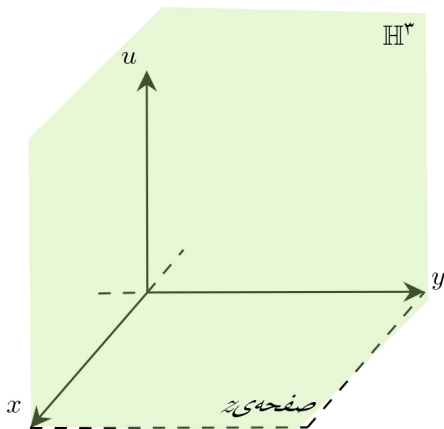
ناحیه‌ای از پاددوسیه $\frac{\text{AdS}'_3}{\Gamma}$ ← زیرگروه خودریختی‌ها

بدون $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ درجه‌ی آزادی ← بدون گراویتون

AdS₃ $\stackrel{\text{diff}}{\sim}$ هر خمینه‌ی اینشتینی



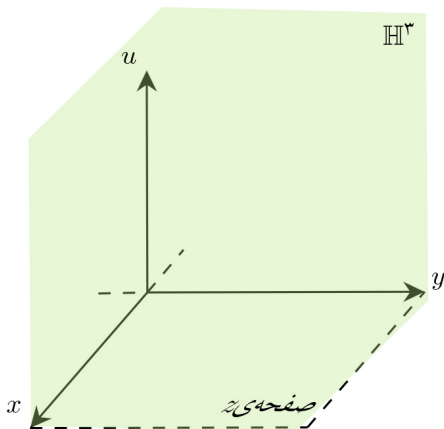
$\frac{\text{AdS}'_3}{\Gamma}$
 ← زیرگروه خودریختی‌ها
 → ناحیه‌ای از پاددوسیه



$$ds^2 = \frac{du^2 + |dz|^2}{u^2}$$

$$\text{Aut}(\mathbb{H}^3) \cong \text{SO}(1, 3)$$

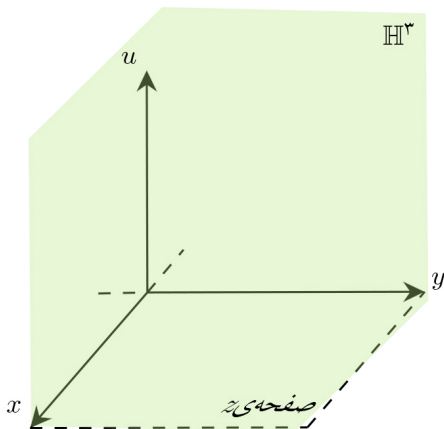
$$|q| < 1 \quad \Gamma = \left\langle \begin{pmatrix} q & \cdot \\ \cdot & q^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{مرز چنبره‌ای}$$



$$ds^3 = \frac{du^2 + |dz|^2}{u^2}$$

$$\text{Aut}(\mathbb{H}^3) \cong \text{SO}(1, 3)$$

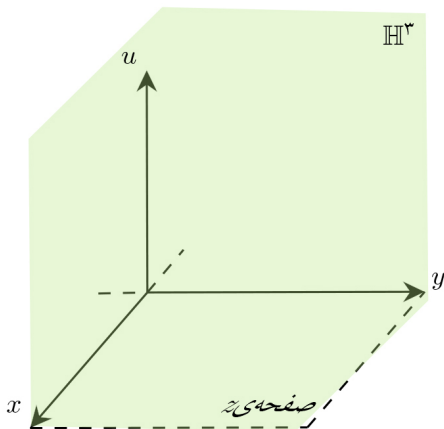
$$|q| < 1 \quad \Gamma = \left\langle \begin{pmatrix} q & \cdot \\ \cdot & q^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{مرز چنبره‌ای}$$



$$ds^3 = \frac{du^3 + |dz|^3}{u^3}$$

$$\text{Aut}(\mathbb{H}^3) \cong \text{SO}(1, 3)$$

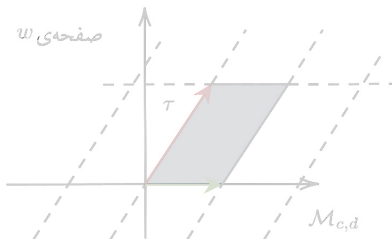
$$|q| < 1 \quad \Gamma = \left\langle \begin{pmatrix} q & \cdot \\ \cdot & q^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{مرز چنبره‌ای}$$



$$ds^3 = \frac{du^3 + |dz|^3}{u^3}$$

$$\text{Aut}(\mathbb{H}^3) \cong \text{SO}(1, 3)$$

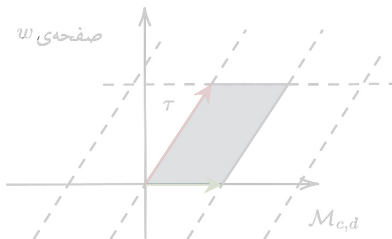
$$|q| < 1 \quad \Gamma = \left\langle \begin{pmatrix} q & \cdot \\ \cdot & q^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{مرز چنبره‌ای}$$



$$z = \exp(\imath \pi i w)$$

$$\begin{cases} w \sim w + 1 \\ w \sim w + \underbrace{\log q / \imath \pi i}_{\tau} \end{cases}$$

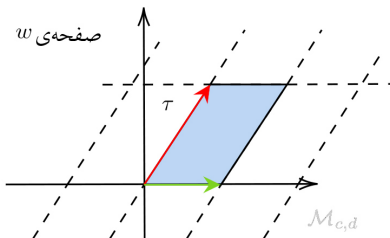
$$\left. \begin{array}{l} \text{ناوردا} - \text{PSL}(\imath, \mathbb{Z}) \\ \tau \longrightarrow \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \end{array} \right\} q \xrightarrow{\text{وابسته به}} c \geq *, \quad (c, d) = 1$$



$$z = \exp(\imath \pi i w)$$

$$\begin{cases} w \sim w + 1 \\ w \sim w + \underbrace{\log q / \imath \pi i}_{\tau} \end{cases}$$

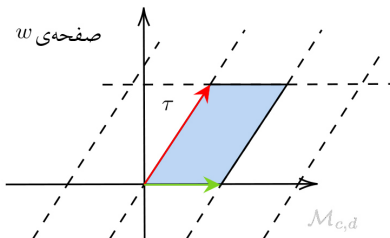
$$\left. \begin{array}{l} \text{ناوردا} - \text{PSL}(\imath, \mathbb{Z}) \\ \tau \longrightarrow \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \end{array} \right\} q \xrightarrow{\text{وابسته به}} c \geq *, \quad (c, d) = 1$$



$$z = \exp(\imath \pi i w)$$

$$\begin{cases} w \sim w + 1 \\ w \sim w + \underbrace{\log q / \imath \pi i}_{\tau} \end{cases}$$

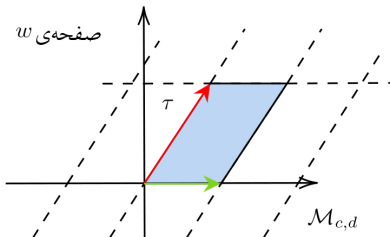
$$\left. \begin{array}{l} \text{ناوردا} - \text{PSL}(\imath, \mathbb{Z}) \\ \tau \longrightarrow \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \end{array} \right\} q \xrightarrow{\text{وابسته به}} c \geq *, \quad (c, d) = 1$$



$$z = \exp(\imath \pi i w)$$

$$\begin{cases} w \sim w + 1 \\ w \sim w + \underbrace{\log q / \imath \pi i}_{\tau} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ناوردا} - \text{PSL}(\imath, \mathbb{Z}) \\ \tau \longrightarrow \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \end{array} \right\} q \xrightarrow{\text{وابسته به}} c \geq 1, \quad (c, d) = 1$$

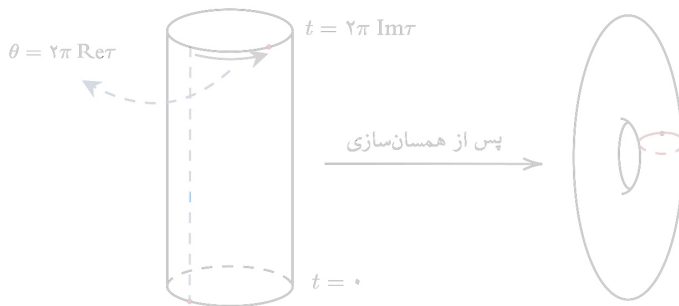


$$z = \exp(\imath \pi i w)$$

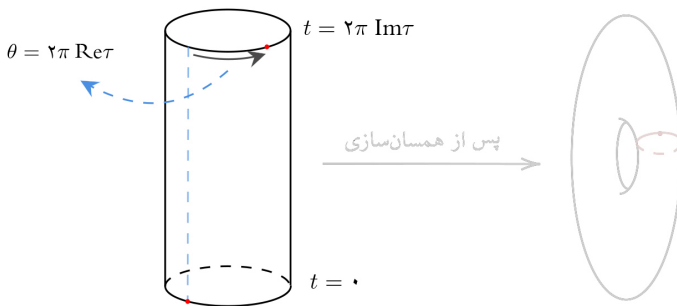
$$\begin{cases} w \sim w + 1 \\ w \sim w + \underbrace{\log q / \imath \pi i}_{\tau} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ناوردا} - \text{PSL}(\imath, \mathbb{Z}) \\ \tau \longrightarrow \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \end{array} \right\} q \xrightarrow{\text{وابسته به}} c \geq 1, \quad (c, d) = 1$$

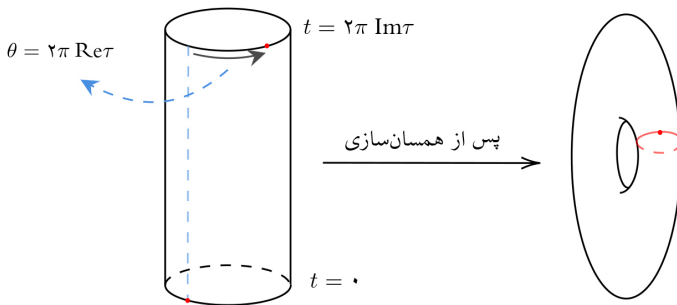
$$\Gamma = \left\langle \begin{pmatrix} e^{b+i\theta} & \cdot \\ \cdot & e^{-b-i\theta} \end{pmatrix} \right\rangle \longrightarrow \begin{cases} \text{Re } \tau = \theta/2\pi \\ \text{Im } \tau = b/2\pi \end{cases}$$



$$\Gamma = \left\langle \begin{pmatrix} e^{b+i\theta} & \cdot \\ \cdot & e^{-b-i\theta} \end{pmatrix} \right\rangle \longrightarrow \begin{cases} \text{Re } \tau = \theta/2\pi \\ \text{Im } \tau = b/2\pi \end{cases}$$



$$\Gamma = \left\langle \begin{pmatrix} e^{b+i\theta} & \cdot \\ \cdot & e^{-b-i\theta} \end{pmatrix} \right\rangle \longrightarrow \begin{cases} \text{Re } \tau = \theta/2\pi \\ \text{Im } \tau = b/2\pi \end{cases}$$



$$\int [\mathcal{D}g] e^{-I} \sim e^{-I[\text{saddle}]}$$

$$I[\mathcal{M}, \gamma] = -\mathfrak{F} \pi k \operatorname{Im} \tau$$

$$k = \frac{\ell}{\sqrt{6} G_N}$$

$$Z_{\gamma}(\tau) = |q\bar{q}|^{-k}$$



$$\int [\mathcal{D}g] e^{-I} \sim e^{-I[\text{saddle}]}$$

$$I[\mathcal{M}, \gamma] = -\mathfrak{F} \pi k \operatorname{Im} \tau$$

$$k = \frac{\ell}{\sqrt{6} G_N}$$

$$Z_{\gamma, \gamma}(\tau) = |q\bar{q}|^{-k}$$



$$\int [\mathcal{D}g] e^{-I} \sim e^{-I[\text{saddle}]}$$

$$I[\mathcal{M}, \gamma] = -\mathfrak{V} \pi k \operatorname{Im} \tau$$

$$k = \frac{\ell}{\sqrt{6} G_N}$$

$$Z_{\gamma, \gamma}(\tau) = |q\bar{q}|^{-k}$$



$$h = \bar{h} = \frac{c}{24} \longrightarrow \mathcal{Z}_{\text{CFT}} \sim e^{-2\pi \text{Im } \tau (h + \bar{h})} \sim |q\bar{q}|^{c/24}$$

$$c = \frac{3\ell}{8G}$$

میدانِ هم‌دیس با $\frac{3\ell}{8G}$

$|\psi\rangle$



گرایشِ کوانتومی سه‌بعدی



فضای گرمایی پاددوسیه

$L_{-1}|\psi\rangle$



عضوی از سیاه‌چاله‌های
خانواده‌ی $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$$h = \bar{h} = \frac{c}{24} \longrightarrow \mathcal{Z}_{\text{CFT}} \sim e^{-2\pi \text{Im } \tau (h + \bar{h})} \sim |q\bar{q}|^{c/24}$$

$$c = \frac{3\ell}{8G}$$

میدانِ هم‌دیس با $\frac{3\ell}{8G}$

$|\psi\rangle$



گرایش کوانتومی سه‌بعدی



فضای گرمایی پاددوسیته β

$L_{-1}|\psi\rangle$



عضوی از سیاه‌چاله‌های
خانواده‌ی $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ $\tilde{\beta}$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$$h = \bar{h} = \frac{c}{24} \longrightarrow \mathcal{Z}_{\text{CFT}} \sim e^{-2\pi \text{Im } \tau (h + \bar{h})} \sim |q\bar{q}|^{c/24}$$

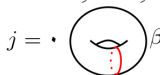
$$c = \frac{3\ell}{8G}$$

میدانِ هم‌مدیس با $\frac{3\ell}{8G}$

$|\bullet\rangle$



گرایشِ کوانتومی سه‌بعدی



فضای گرمایی پاددوسیته β

$L_{-1}|\bullet\rangle$



عضوی از سیاه‌چاله‌های
خانواده‌ی $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ $\tilde{\beta}$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$$h = \bar{h} = \frac{c}{24} \longrightarrow \mathcal{Z}_{\text{CFT}} \sim e^{-2\pi \text{Im } \tau (h + \bar{h})} \sim |q\bar{q}|^{c/24}$$

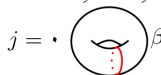
$$c = \frac{3\ell}{8G}$$

میدانِ هم‌مدیس با $\frac{3\ell}{8G}$

$|\bullet\rangle$

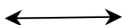


گِرانشِ کوانتومی سه‌بعدی



فضای گرمایی پاددوسیته β

$L_{-1}|\bullet\rangle$



عضوی از سیاه‌چاله‌های
خانواده‌ی $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ $\tilde{\beta}$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

شروع کوانتش $(\mathcal{P}, \omega) \longrightarrow$

$$ds^\gamma = \frac{\ell^\gamma}{r^\gamma} dr^\gamma - \left(r dx^+ - \frac{\gamma G \ell}{r} \underbrace{\bar{p}(x^-)}_{\in \text{Diff}(S^1)} dx^- \right) \left(r dx^- - \frac{\gamma G \ell}{r} \underbrace{p(x^+)}_{\in \text{Diff}(S^1)} dx^+ \right)$$

$$\mathcal{P} = \left(\frac{\text{Diff}(S^1)}{\text{U}(1)} \right)^\gamma$$

شروع کوانتش $(\mathcal{P}, \omega) \longrightarrow$

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 - \left(r dx^+ - \frac{\ell G \ell}{r} \underbrace{\bar{p}(x^-)}_{\in \text{Diff}(S^1)} dx^- \right) \left(r dx^- - \frac{\ell G \ell}{r} \underbrace{p(x^+)}_{\in \text{Diff}(S^1)} dx^+ \right)$$

$$\mathcal{P} = \left(\frac{\text{Diff}(S^1)}{\text{U}(1)} \right)'$$

شروع کوانتش $\longrightarrow (\mathcal{P}, \omega)$

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 - \left(r dx^+ - \frac{\ell G \ell}{r} \underbrace{\bar{p}(x^-)}_{\in \text{Diff}(S^1)} dx^- \right) \left(r dx^- - \frac{\ell G \ell}{r} \underbrace{p(x^+)}_{\in \text{Diff}(S^1)} dx^+ \right)$$

$$\mathcal{P} = \left(\frac{\text{Diff}(S^1)}{\text{U}(1)} \right)'$$

شروع کوانتش $(\mathcal{P}, \omega) \longrightarrow$

$$ds^{\mathfrak{V}} = \frac{\ell^{\mathfrak{V}}}{r^{\mathfrak{V}}} dr^{\mathfrak{V}} - \left(r dx^+ - \frac{\mathfrak{V} G \ell}{r} \underbrace{\bar{p}(x^-)}_{\in \text{Diff}(S^{\mathfrak{V}})} dx^- \right) \left(r dx^- - \frac{\mathfrak{V} G \ell}{r} \underbrace{p(x^+)}_{\in \text{Diff}(S^{\mathfrak{V}})} dx^+ \right)$$

$$\mathcal{P} = \left(\frac{\text{Diff}(S^{\mathfrak{V}})}{\text{U}(\mathfrak{V})} \right)^{\mathfrak{V}}$$

گرانش کوانتومی سه بعدی $\longrightarrow (\mathcal{P}, \omega_{\text{KKS}})$

کوانتش $\frac{G}{H}$

کوانتش $\frac{\text{Diff}(S^1)}{U(1)}$

$\mathcal{H} \xrightarrow{\text{نمایش}} \tilde{\mathfrak{g}}$

$|0\rangle \rightarrow H\text{-ناوردا}$

جبر $\widetilde{\text{diff}}(S^1) \rightarrow \text{diff}(S^1)$

$\mathcal{H} \rightarrow \text{ماژول ورما}$

$|0\rangle_{\text{Vir}} \rightarrow U(1)\text{-ناوردا}$

$$(\mathcal{P}, \omega_{\text{KKS}}) \longrightarrow \text{گرانش کوانتومی سه بعدی}$$

$$\frac{G}{H} \text{ کوانتش}$$

$$\frac{\text{Diff}(S^1)}{U(1)} \text{ کوانتش}$$

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\text{نمایش}} \tilde{\mathfrak{g}}$$

$$|\bullet\rangle \rightarrow H - \text{ناوردا}$$

$$\text{diff}(S^1) \rightarrow \widetilde{\text{diff}}(S^1) \text{ جبر}$$

$$\mathcal{H} \rightarrow \text{ماژول ورما}$$

$$|\bullet\rangle_{\text{Vir}} \rightarrow U(1) - \text{ناوردا}$$

$$(\mathcal{P}, \omega_{\text{KKS}}) \longrightarrow \text{گرانش کوانتومی سه بعدی}$$

$$\frac{G}{H} \text{ کوانتش}$$

$$\frac{\text{Diff}(S^1)}{U(1)} \text{ کوانتش}$$

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\text{نمایش}} \tilde{\mathfrak{g}}$$

$$|\bullet\rangle \rightarrow H\text{-ناوردا}$$

$$\text{diff}(S^1) \rightarrow \widetilde{\text{diff}}(S^1) \text{ جبر}$$

$$\mathcal{H} \rightarrow \text{ماژول ورما}$$

$$|\bullet\rangle_{\text{Vir}} \rightarrow U(1)\text{-ناوردا}$$

گرانش کوانتومی سه بعدی $\longrightarrow (\mathcal{P}, \omega_{\text{KKS}})$

کوانتش $\frac{G}{H}$

کوانتش $\frac{\text{Diff}(S^1)}{U(1)}$

$\mathcal{H} \xrightarrow{\text{نمایش}} \tilde{\mathfrak{g}}$

$|0\rangle \rightarrow H\text{-ناوردا}$

جبر $\widetilde{\text{diff}}(S^1) \rightarrow \text{diff}(S^1)$

$\mathcal{H} \rightarrow \text{ماژول ورما}$

$|0\rangle_{\text{Vir}} \rightarrow U(1)\text{-ناوردا}$

$$(\mathcal{P}, \omega_{\text{KKS}}) \longrightarrow \text{گرانش کوانتومی سه بعدی}$$

$$\frac{G}{H} \text{ کوانتش}$$

$$\frac{\text{Diff}(S^1)}{U(1)} \text{ کوانتش}$$

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\text{نمایش}} \tilde{\mathfrak{g}}$$

$$|\bullet\rangle \rightarrow H\text{-ناوردا}$$

$$\text{diff}(S^1) \rightarrow \widetilde{\text{diff}}(S^1) \text{ جبر}$$

$$\mathcal{H} \rightarrow \text{ماژول ورما}$$

$$|\bullet\rangle_{\text{Vir}} \rightarrow U(1)\text{-ناوردا}$$

$$\mathcal{H}_{\text{3D-grav}} \cong V_{h=c/24} \otimes \bar{V}_{\bar{h}=c/24} \rightarrow \text{نمایش های جبر ویراسورو}$$

$$\text{حالات} \longrightarrow L_{-n}^{a_n} L_{-m}^{a_m} |0\rangle_{\text{vir}}, \quad E = -k + \sum_n n a_n + \sum_m m a_m$$

$$\text{گرانش سه بعدی کوانتومی} \equiv \text{CFT}_2$$

$$\mathcal{H}_{\text{3D-grav}} \cong V_{h=c/24} \otimes \overline{V}_{\bar{h}=c/24} \rightarrow \text{نمایش های جبر ویراسورو}$$

$$\text{حالات} \rightarrow L_{-n}^{a_n} L_{-m}^{a_m} |\bullet\rangle_{\text{vir}}, \quad E = -k + \sum_n n a_n + \sum_m m a_m$$

$$\text{گرانش سه بعدی کوانتومی} \equiv \text{CFT}_2$$

$$\mathcal{H}_{\text{3D-grav}} \cong V_{h=c/24} \otimes \overline{V}_{\bar{h}=c/24} \rightarrow \text{نمایش های جبر ویراسورو}$$

$$\text{حالات} \longrightarrow L_{-n}^{a_n} L_{-m}^{a_m} |\bullet\rangle_{\text{vir}}, \quad E = -k + \sum_n n a_n + \sum_m m a_m$$

$$\text{گرانش سه بعدی کوانتومی} \equiv \text{CFT}_2$$

$$\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}g] e^{-I} = \sum_g \exp \left(-cI[g, \cdot] + I^{(1)}[g, \cdot] + \mathcal{O}(1/c) \right)$$

فرینه‌ی کلاسیک

کنش EH

کنش موثر تک‌حلقه

$$Z_{\text{3D-grav}} = Z_{\text{CFT}}$$

$$\xrightarrow{\text{دترمینان تک‌حلقه}} Z_{*,1}(\tau) = |q\bar{q}|^{-k} \times \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} |1 - q^n|^2}$$

$$\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}g] e^{-I} = \sum_g \exp \left(-cI[g, \cdot] + I^{(1)}[g, \cdot] + \mathcal{O}(1/c) \right)$$

فرینه‌ی کلاسیک

کنش EH

کنش موثر تک‌حلقه

$$Z_{\text{3D-grav}} = Z_{\text{CFT}}$$

$$\xrightarrow{\text{دترمینان تک‌حلقه}} \mathcal{Z}_{*,1}(\tau) = |q\bar{q}|^{-k} \times \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} |1 - q^n|^2}$$

$$\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}g] e^{-I} = \sum_g \exp \left(-cI[g, \cdot] + I^{(1)}[g, \cdot] + \mathcal{O}(1/c) \right)$$

فرینه‌ی کلاسیک

کنش EH

کنش موثر تک‌حلقه

$$Z_{\text{3D-grav}} = Z_{\text{CFT}}$$

$$\xrightarrow{\text{دترمینان تک‌حلقه}} \mathcal{Z}_{*,1}(\tau) = |q\bar{q}|^{-k} \times \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} |1 - q^n|^2}$$

$$\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}g] e^{-I} = \sum_g \exp \left(-cI[g, \cdot] + I^{(1)}[g, \cdot] + \mathcal{O}(1/c) \right)$$

فرینه‌ی کلاسیک

کنش EH

کنش موثر تک‌حلقه

$$Z_{\text{3D-grav}} = Z_{\text{CFT}}$$

$$\xrightarrow{\text{دترمینان تک‌حلقه}} \mathcal{Z}_{\cdot,1}(\tau) = |q\bar{q}|^{-k} \times \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} |1 - q^n|^2}$$

$$\mathcal{Z}(\tau) = \sum_{\gamma} \mathcal{Z}_{\bullet, \bullet}(\gamma\tau) = \sum_{c \geq \bullet, (c,d)=\bullet} \mathcal{Z}_{\bullet, \bullet}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$$

روش های ریاضی
 واگرایی
 $\tau = x + iy$ روی اختلال

} سری پوانکاره

$$\mathcal{Z}(\tau) = \sum_{\gamma} \mathcal{Z}_{\bullet, \bullet}(\gamma\tau) = \sum_{c \geq \bullet, (c,d)=\bullet} \mathcal{Z}_{\bullet, \bullet}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$$

روش های ریاضی
 واگرایی
 اختلال روی $\tau = x + iy$

} سری پوانکاره

$$Z = Z_{\cdot,1} + \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} (-\epsilon + \mathcal{O}(y^{-1}))$$

چگالی حالات منفی
مرتبه‌ی تصحیحات در تناقض با هولوگرافی

نتیجه: تابع پارش گرانش سه‌بعدی از لحاظ فیزیکی و هولوگرافی بی‌معناست.

$$Z = Z_{\text{cl}} + \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} (-\epsilon + \mathcal{O}(y^{-1}))$$

چگالی حالات منفی
مرتبه‌ی تصحیحات در تناقض با هولوگرافی

نتیجه: تابع پارش گرانش سه‌بعدی از لحاظ فیزیکی و هولوگرافی بی‌معناست.

$$Z = Z_{\text{cl}} + \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} (-\epsilon + \mathcal{O}(y^{-1}))$$

چگالی حالات منفی
مرتبه‌ی تصحیحات در تناقض با هولوگرافی

نتیجه: تابع پارش گرانش سه‌بعدی از لحاظ فیزیکی و هولوگرافی بی‌معناست.

$$\sim \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \left(-6 + \frac{(\pi^2 - 6\pi)(24k+1)}{9\zeta(3)} y^{-1} + \mathcal{O}(y^{-2}) \right)$$

ضرایبِ $y \notin \mathbb{N}$

بدون تجزیه‌ی هلمورفیک

تصحیحاتِ وارد به S_{BTZ}

$$\sim \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \left(-6 + \frac{(\pi^2 - 6\pi)(24k+1)}{9\zeta(3)} y^{-1} + \mathcal{O}(y^{-2}) \right)$$

ضرایبِ $\mathbb{N}$ $y \notin$

بدون تجزیه‌ی هلمورفیک

تصحیحاتِ وارد به S_{BTZ}

$$\sim \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \left(-6 + \frac{(\pi^2 - 6\pi)(24k+1)}{9\zeta(3)} y^{-1} + \mathcal{O}(y^{-2}) \right)$$

ضرایبِ $\mathbb{N}$ $y \notin$

بدون تجزیه‌ی هلمورفیک

تصحیحاتِ وارد به S_{BTZ}

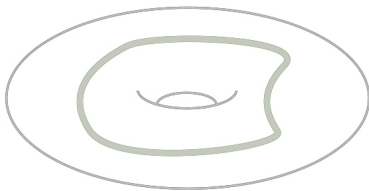
$$\sim \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \left(-6 + \frac{(\pi^2 - 6\pi)(24k+1)}{9\zeta(3)} y^{-1} + \mathcal{O}(y^{-2}) \right)$$

ضرایبِ $\mathbb{N}$ $y \notin$

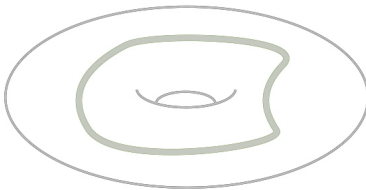
بدون تجزیه‌ی هلمورفیک

تصحیحاتِ وارد به S_{BTZ}

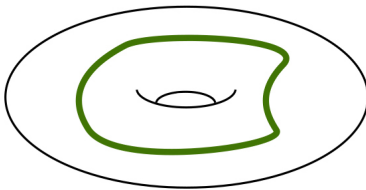
گران‌ش سه‌بعدی خودناسازگار است
سه‌م‌های جدید و مهم



گران‌ش سه‌بعدی خودناسازگار است
سه‌م‌های جدید و مهم



گران‌ش سه‌بعدی خودناسازگار است
سه‌م‌های جدید و مهم



از تمامی دوستانی که در این مدت همراه من بودند، چه در مسائل کوچک و چه در مسائل بزرگ، صمیمانه و از اعماق قلبم سپاس‌گزارم.

از استاد راهنمای عزیزم، امین فرجی، و آقای دکتر ارفع‌ی بابت حمایت و دلگرمی‌هاشان سپاس‌گزارم.

می‌توانید به من لطفی بکنید؟

از تمامی دوستانی که در این مدت همراه من بودند، چه در مسائل کوچک و چه در مسائل بزرگ، صمیمانه و از اعماق قلبم سپاس‌گزارم.

از استاد راهنمای عزیزم، امین فرجی، و آقای دکتر ارفع‌ی بابت حمایت و دلگرمی‌هاشان سپاس‌گزارم.

می‌توانید به من لطفی بکنید؟

از تمامی دوستانی که در این مدت همراه من بودند، چه در مسائل کوچک و چه در مسائل بزرگ، صمیمانه و از اعماق قلبم سپاس‌گزارم.

از استاد راهنمای عزیزم، امین فرجی، و آقای دکتر ارفعی بابت حمایت و دلگرمی‌هاشان سپاس‌گزارم.

می‌توانید به من لطفی بکنید؟

تابع پارشِ گرانشِ سه‌بعدی (نسخه‌ی متنی)

$$|\Psi\rangle = |\text{circle with dashed line}\rangle + |\text{circle with one handle}\rangle + |\text{circle with two handles}\rangle + \dots$$

شکل: تابع موج کوانتومی فضازمان: ترکیب خطی هندسه‌های مختلف

انگیزه‌ها از نگاه کردن به تابع پارش در سامانه‌های فیزیکی و به‌طور خاص در گرانش کوانتومی:
 طیف انرژی سامانه‌ی کوانتومی و چگالی حالات.

$$Z = \sum_n \rho_n e^{-\beta E_n}$$

- ◀ خواص ترمودینامیکی فضازمان - گذر فازه‌ای فضازمان
- ◀ آنتروپی سیاه‌چاله‌ها و تصحیحات به رابطه‌ی بکنستین - هاوکینگ
- ◀ فیزیک و رای تقریب نیمه کلاسیک

$$|\Psi\rangle = |\text{circle with dashed line}\rangle + |\text{circle with one handle}\rangle + |\text{circle with two handles}\rangle + \dots$$

شکل: تابع موجِ کوانتومی فضازمان: ترکیبِ خطیِ هندسه‌های مختلف

انگیزه‌ها از نگاه کردن به تابع پارش در سامانه‌های فیزیکی و به‌طورِ خاص در گرانش کوانتومی :
 ▶ طیفِ انرژیِ سامانه‌ی کوانتومی و چگالیِ حالات.

$$Z = \sum_n \rho_n e^{-\beta E_n}$$

- ▶ خواصِ ترمودینامیکیِ فضازمان - گذر فازه‌ای فضازمان
- ▶ آنتروپی سیاه‌چاله‌ها و تصحیحات به رابطه‌ی بکنستین-هاوکینگ
- ▶ فیزیکِ ورایِ تقریبِ نیمه کلاسیک

$$|\Psi\rangle = |\text{circle with dashed line}\rangle + |\text{circle with one handle}\rangle + |\text{circle with two handles}\rangle + \dots$$

شکل: تابع موجِ کوانتومی فضازمان: ترکیبِ خطیِ هندسه‌های مختلف

انگیزه‌ها از نگاه کردن به تابع پارش در سامانه‌های فیزیکی و به‌طورِ خاص در گرانش کوانتومی :
 ▶ طیفِ انرژیِ سامانه‌ی کوانتومی و چگالیِ حالات.

$$Z = \sum_n \rho_n e^{-\beta E_n}$$

- ▶ خواصِ ترمودینامیکیِ فضازمان - گذر فازه‌ای فضازمان
- ▶ آنتروپی سیاه‌چاله‌ها و تصحیحات به رابطه‌ی بکنستین-هاوکنینگ
- ▶ فیزیکِ ورایِ تقریبِ نیمه کلاسیک

$$|\Psi\rangle = |\text{circle}\rangle + |\text{figure-eight}\rangle + |\text{double-figure-eight}\rangle + \dots$$

شکل: تابع موج کوانتومی فضازمان: ترکیب خطی هندسه‌های مختلف

انگیزه‌ها از نگاه کردن به تابع پارش در سامانه‌های فیزیکی و به‌طور خاص در گرانش کوانتومی:
 ▶ طیف انرژی سامانه‌ی کوانتومی و چگالی حالات.

$$Z = \sum_n \rho_n e^{-\beta E_n}$$

- ▶ خواص ترمودینامیکی فضازمان - گذر فازه‌ای فضازمان
- ▶ آنتروپی سیاه‌چاله‌ها و تصحیحات به رابطه‌ی بکنستین-هاوکینگ
- ▶ فیزیک ورای تقریب نیمه کلاسیک

$$|\Psi\rangle = |\text{circle}\rangle + |\text{torus}\rangle + |\text{double torus}\rangle + \dots$$

شکل: تابع موجِ کوانتومی فضازمان: ترکیبِ خطیِ هندسه‌های مختلف

انگیزه‌ها از نگاه کردن به تابع پارش در سامانه‌های فیزیکی و به‌طورِ خاص در گرانش کوانتومی :
 ▶ طیفِ انرژیِ سامانه‌ی کوانتومی و چگالیِ حالات.

$$Z = \sum_n \rho_n e^{-\beta E_n}$$

- ▶ خواصِ ترمودینامیکیِ فضازمان - گذر فازه‌ای فضازمان
- ▶ آنتروپی سیاه‌چاله‌ها و تصحیحات به رابطه‌ی بکنستین - هاوکینگ
- ▶ فیزیکِ وِرایِ تقریبِ نیمه کلاسیک

تمرکز ویژه روی — تصویر تمام‌نگاری گرانش سه‌بعدیِ مجانباً پاددوسیتِه خالص.

اصل تمام‌نگاری

تمامی محتوای یک نظریه‌ی گرانش کوانتومی با نظریه‌ی کوانتومی که روی مرزش زندگی می‌کند، توصیف می‌شود^۲.

^۲توجه کنید که این تعریف خیلی مبهم است و یک تجسم از این اصل در دوگانی پیمانهِ گرانش است.

شناخت نظریه‌ی میدانِ همدیس $\longleftrightarrow$ طیف-حالات-عملگرها $\longleftrightarrow$ شناخت نظریه‌ی گرانش کوانتومی
انگیزه گرفته از این دیدگاه + چارچوبِ دوگانی پیمانهِ گرانش $\longleftrightarrow$ تابع پارشِ گرانشِ
کوانتومی سه‌بعد = تابع پارشِ نظریه‌ی میدانِ همدیس رویِ مرزِ همدیس^۱.

^۱از لحاظ تاریخی، استدلال معروفِ Brown-Henneaux در سال ۱۹۸۶ انجام شد، اما دوگانی پیمانهِ گرانش در اواخر ۱۹۹۷ معرفی شد. بنابراین انتظارِ دوگان بودن با نظریه‌ی میدانِ همدیس حداقل در مورد گرانش سه‌بعدی، پیشینه‌ای طولانی‌تر دارد.

تمرکز ویژه روی — تصویر تمام‌نگاری گرانش سه‌بعدیِ مجانباً پاددوسیتِه خالص.

اصل تمام‌نگاری

تمامی محتوای یک نظریه‌ی گرانش کوانتومی با نظریه‌ی کوانتومی که روی مرزش زندگی می‌کند، توصیف می‌شود^۲.

^۲توجه کنید که این تعریف خیلی مبهم است و یک تجسم از این اصل در دوگانی پیمانه/گرانش است.

شناخت نظریه‌ی میدانِ همدیس $\longleftrightarrow$ طیف-حالات-عملگرها $\longleftrightarrow$ شناخت نظریه‌ی گرانش کوانتومی
انگیزه گرفته از این دیدگاه + چارچوبِ دوگانی پیمانه/گرانش $\longleftrightarrow$ تابع پارشِ گرانشِ
کوانتومی سه‌بعد = تابع پارشِ نظریه‌ی میدانِ همدیس رویِ مرزِ همدیس^۱.

^۱از لحاظ تاریخی، استدلال معروفِ Brown-Henneaux در سال ۱۹۸۶ انجام شد، اما دوگانی پیمانه/گرانش در اواخر ۱۹۹۷ معرفی شد. بنابراین انتظارِ دوگان بودن با نظریه‌ی میدانِ همدیس حداقل در مورد گرانش سه‌بعدی، پیشینه‌ای طولانی‌تر دارد.

تمرکز ویژه روی — تصویر تمام‌نگاری گرانس سه‌بعدیِ مجانباً پاددوسیتِه خالص.

اصل تمام‌نگاری

تمامی محتوای یک نظریه‌ی گرانس کوانتومی با نظریه‌ی کوانتومی که روی مرز زندگی می‌کند، توصیف می‌شود^۲.

^۲ توجه کنید که این تعریف خیلی مبهم است و یک تجسم از این اصل در دوگانی پیمانه/گرانس است.

شناخت نظریه‌ی میدانِ همدیس $\longleftrightarrow$ طیف-حالات-عملگرها $\longleftrightarrow$ شناخت نظریه‌ی گرانس کوانتومی
انگیزه گرفته از این دیدگاه + چارچوبِ دوگانی پیمانه/گرانس — تابع پارشِ گرانسِ
کوانتومی سه‌بعد = تابع پارشِ نظریه‌ی میدانِ همدیس رویِ مرزِ همدیس^۱.

^۱ از لحاظ تاریخی، استدلال معروفِ Brown-Henneaux در سال ۱۹۸۶ انجام شد، اما دوگانی پیمانه/گرانس در اواخر ۱۹۹۷ معرفی شد. بنابراین انتظارِ دوگان بودن با نظریه‌ی میدانِ همدیس حداقل در مورد گرانس سه‌بعدی، پیشینه‌ای طولانی‌تر دارد.

سهم کلاسیک به تابع پارش

اولین قدم در حصولِ خمینه‌های کلاسیک قید کردنِ توپولوژیِ فضا زمان است.

▶ مرزِ هم‌دیس، Σ چنبره است.

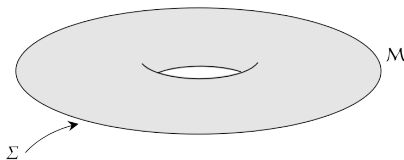
▶ متریکِ رویِ چنبره تخت، $ds^2 = |dz|^2$ ، است.

فرضهای استانداردِ نسبیتِ عام:

① $\mathcal{M}$ هموار است.

② متریکِ $\mathcal{M}$ کامل است.

③ $\partial\mathcal{M} = \Sigma$



شکل: توپولوژیِ فضا زمان‌های کلاسیک - مرزِ هم‌دیسِ چنبره‌ای

سهم کلاسیک به تابع پارش

اولین قدم در حصول خمینه‌های کلاسیک قید کردن توپولوژی فضا زمان است.

◀ مرزِ هم‌دیس، Σ چنبره است.

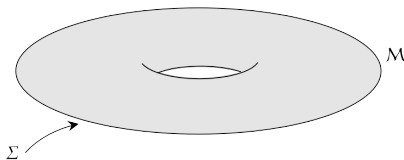
◀ متریکِ رویِ چنبره تخت، $ds^2 = |dz|^2$ ، است.

فرضهای استانداردِ نسبتِ عام:

❶ $\mathcal{M}$ هموار است.

❷ متریکِ $\mathcal{M}$ کامل است.

❸ $\partial\mathcal{M} = \Sigma$



شکل: توپولوژی فضا زمان‌های کلاسیک - مرزِ هم‌دیسِ چنبره‌ای

فضای پاددوسیته در نشانگان اقلیدسی = نیم فضای بالایی پوانکاره ($\mathbb{H}^3$) با متریک

$$ds^2 = \frac{du^2 + |dz|^2}{u^2} \quad (4)$$

◀ مرزِ همدیس ← کره‌ی ریمان ($\hat{\mathbb{C}}$)

◀ گروه خودریختی ← گروه لورنتز یا $SO(1, 3)/\mathbb{Z}_2 \cong SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

بدون ورود به جزئیات فقط و فقط ← $W = \begin{pmatrix} q & \cdot \\ \cdot & q^{-1} \end{pmatrix}$ (با شرط $|q| < 1$) به ما چنبره می‌دهد.

پرمایش مرز همدیس با $z = \exp(2\pi i w)$ ← اثر این زیرگروه $w \rightarrow w + \log q / 2\pi i$

هم‌سان‌سازی با $\begin{cases} w \sim w + 1 \\ w \sim w + \log q / 2\pi i \end{cases}$ ← می‌سازد چنبره با پارامتر خشتی $\tau = \log q / 2\pi i$ (یا $q = e^{2\pi i \tau}$).

فضای پاددوسیته در نشانگان اقلیدسی = نیم فضای بالایی پوانکاره ($\mathbb{H}^3$) با متریک

$$ds^2 = \frac{du^2 + |dz|^2}{u^2} \quad (4)$$

◀ مرزِ همدیس ← کره‌ی ریمان ($\hat{\mathbb{C}}$)

◀ گروه خودریختی ← گروه لورنتز یا $SO(1, 3)/\mathbb{Z}_2 \cong SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

بدون ورود به جزئیات فقط و فقط ← $W = \begin{pmatrix} q & \cdot \\ \cdot & q^{-1} \end{pmatrix}$ (با شرط $|q| < 1$) به ما چنبره می‌دهد.

پرمایش مرز همدیس با $z = \exp(2\pi i w)$ ← اثر این زیرگروه $w \rightarrow w + \log q / 2\pi i$

هم‌سان‌سازی با $\begin{cases} w \sim w + 1 \\ w \sim w + \log q / 2\pi i \end{cases}$ ← می‌سازد چنبره با پارامتر خشتی $\tau = \log q / 2\pi i$ (یا $q = e^{2\pi i \tau}$).

فضای پاددوسیته در نشانگان اقلیدسی = نیم فضای بالایی پوانکاره ($\mathbb{H}^3$) با متریک

$$ds^2 = \frac{du^2 + |dz|^2}{u^2} \quad (4)$$

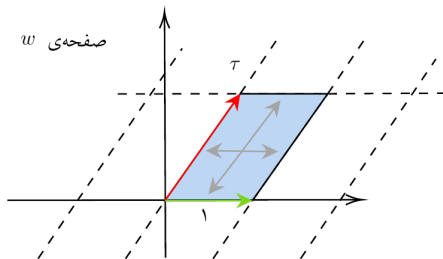
◀ مرزِ همدیس ← کره‌ی ریمان ($\hat{\mathbb{C}}$)

◀ گروه خودریختی ← گروه لورنتز یا $SO(1, 3)/\mathbb{Z}_2 \cong SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

بدون ورود به جزئیات فقط و فقط ← $W = \begin{pmatrix} q & \cdot \\ \cdot & q^{-1} \end{pmatrix}$ (با شرط $|q| < 1$) به ما چنبره می‌دهد.

پرمایش مرز همدیس با $z = \exp(2\pi i w)$ ← اثر این زیرگروه $w \rightarrow w + \log q / 2\pi i$

هم‌سان‌سازی با $\begin{cases} w \sim w + 1 \\ w \sim w + \log q / 2\pi i \end{cases}$ ← می‌سازد چنبره با پارامتر خشتی
 (یا $q = e^{2\pi i \tau}$) $\tau = \log q / 2\pi i$.



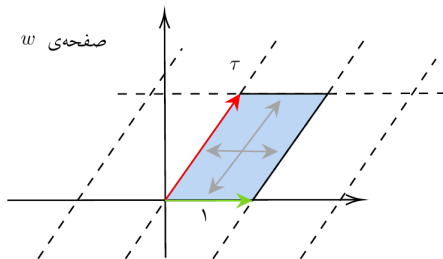
شکل: ساخت چنبره از کاشی‌کاری صفحه‌ی مختلط با پارامتر خشتی τ

از ناوردایی خشتی (تبدیل پارامتر خشتی با $(\text{PSL}(2, \mathbb{Z}))$ $\longleftarrow q$ به انتخاب $c \geq 0$ و d ، طوری که $(c, d) = 1$ ، وابسته است.^۴

$\mathcal{M}_{c,d}$ نماد $\longleftarrow$ خانواده‌ی خمینه‌های کلاسیک مورد بحث^۵.

$$^4 q = \exp(2\pi i(a\tau + b)/(c\tau + d)).$$

^۵ پارامتر خشتی را ضمنی نگه داشته‌ایم.



شکل: ساخت چنبره از کاشی‌کاری صفحه‌ی مختلط با پارامترِ خشتی τ

از ناوردایی خشتی (تبدیل پارامترِ خشتی با $(\mathbb{Z}, 2)$ PSL) $\longleftarrow q$ به انتخاب $c \geq 0$ و d ، طوری که $(c, d) = 1$ ، وابسته است.^۴

$\mathcal{M}_{c,d}$ نماد $\longleftarrow$ خانواده‌ی خمینه‌های کلاسیکِ موردِ بحث^۵.

^۴ $q = \exp(2\pi i(a\tau + b)/(c\tau + d)).$

^۵پارامترِ خشتی را ضمنی نگه داشته‌ایم.

گروه خودریختی $\Gamma = \left\langle \begin{pmatrix} e^{b+i\theta} & \cdot \\ \cdot & e^{-b-i\theta} \end{pmatrix} \right\rangle$ کلِ مرزِ همدیس.
جزئیات اثر گروه روی مرزِ همدیس و مختصه‌ها (...)

۱ اثر زیرگروه $\text{diag}(e^b, e^{-b})$ $t \rightarrow t + b$

۲ اثر زیرگروه $\text{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ $\phi \rightarrow \phi + \theta$

رفع یک ابهام: چرا مرزِ چنبره‌ای؟

ارتباطِ پارامترِ خشتی چنبره $\leftarrow$ ترمودینامیک فضازمان (و سیاه‌چاله‌ها)

مرزِ همدیسِ کروی $\xleftarrow{\text{مطابقِ دوگانی پیمانه/گرانش}}$ پایداریِ خلا

$$\Gamma + \text{کلِ مرزِ همدیس} = \left\langle \begin{pmatrix} e^{b+i\theta} & \cdot \\ \cdot & e^{-b-i\theta} \end{pmatrix} \right\rangle$$

جزئیات اثر گروه روی مرز همدیس و مختصه‌ها (...)

❶ اثر زیرگروه $\text{diag}(e^b, e^{-b})$ $t \rightarrow t + b$

❷ اثر زیرگروه $\text{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ $\phi \rightarrow \phi + \theta$

رفع یک ابهام: چرا مرز چنبره‌ای؟

ارتباط پارامتر خشتی چنبره $\leftarrow$ ترمودینامیک فضا زمان (و سیاه‌چاله‌ها)
مرزِ همدیسِ کروی $\xleftarrow{\text{مطابقِ دوگانی پیمانِه/گرانش}}$ پایداریِ خلا

$$\Gamma + \text{کلِ مرزِ همدیس} = \left\langle \begin{pmatrix} e^{b+i\theta} & \cdot \\ \cdot & e^{-b-i\theta} \end{pmatrix} \right\rangle$$

جزئیات اثر گروه روی مرز همدیس و مختصه‌ها (...)

❶ اثر زیرگروه $\text{diag}(e^b, e^{-b}) \leftarrow t \rightarrow t + b$

❷ اثر زیرگروه $\text{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) \leftarrow \phi \rightarrow \phi + \theta$

رفع یک ابهام: چرا مرزِ چنبره‌ای؟

ارتباطِ پارامترِ خشتی چنبره $\leftarrow$ ترمودینامیک فضازمان (و سیاه‌چاله‌ها)

مرزِ همدیسِ کروی $\xleftarrow{\text{مطابقِ دوگانیِ پیمانۀ/گرانش}}$ پایداریِ خلا

$$\Gamma + \text{کلِ مرزِ همدیس} = \left\langle \begin{pmatrix} e^{b+i\theta} & \cdot \\ \cdot & e^{-b-i\theta} \end{pmatrix} \right\rangle$$

جزئیات اثر گروه روی مرز همدیس و مختصه‌ها (...)

❶ اثر زیرگروه $\text{diag}(e^b, e^{-b})$ $t \rightarrow t + b$

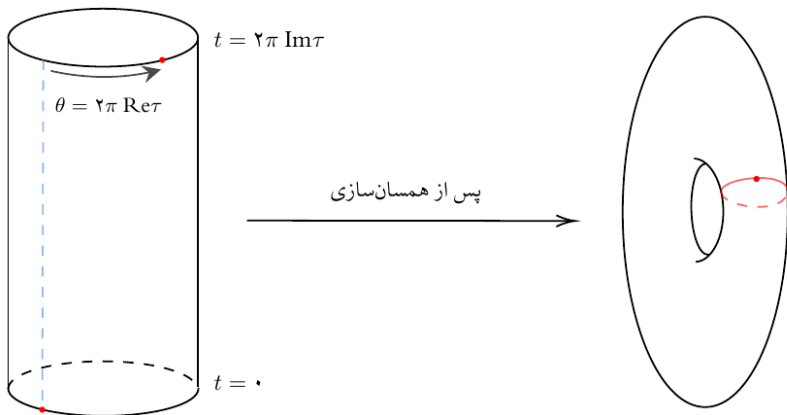
❷ اثر زیرگروه $\text{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ $\phi \rightarrow \phi + \theta$

رفع یک ابهام: چرا مرزِ چنبره‌ای؟

ارتباطِ پارامترِ خشتی چنبره $\leftarrow$ ترمودینامیک فضا زمان (و سیاه‌چاله‌ها)

مرزِ همدیسِ کروی $\xleftarrow{\text{مطابقِ دوگانی پیمانه/گرانش}}$ پایداریِ خلا

$$|\Psi\rangle = |\text{circle}\rangle + |\text{torus}\rangle + |\text{pair of tori}\rangle + \dots$$



شکل: ساخت خمینه $\mathcal{M}_{g,1}$: اول در $t = 0$ و $t = 2\pi \text{Im}\tau$ ، استوانه‌ی طویل فضا زمان را می‌بریم و سپس نقاط روی دایره‌های مرز را با چرخش $\theta = 2\pi \text{Re}\tau$ همسان می‌کنیم. در شکل، نقطه‌ی قرمز در دایره‌ی بالا و پایینی با هم همسان می‌شوند و پس از انجام همسان‌سازی، روی چنبره نشان داده شده‌اند.

محاسبه‌ی تابع پارش « تقریبِ خام

دسته‌بندی فضازمان‌های کلاسیکِ فرینه $\xleftarrow{\text{با هدف}}$ محاسبه‌ی انتگرالِ مسیرِ گرانشی.
به‌لطفِ تبدیلاتِ خستیِ چنبره

$$Z_{c,d}(\tau) = Z_{*,1}(\gamma\tau)$$

$$Z(\tau) = \sum_{c,d} Z_{c,d}(\tau) = \sum_{c \geq *, (c,d)=1} Z_{*,1}((a\tau + b)/(c\tau + d)). \quad (5)$$

تقریبِ خام: جاگذاریِ فرینه‌های کلاسیک در (۱).
با جاگذاریِ در کنش (۲) $\xleftarrow{\text{با هدف}}$ $I = -4\pi k \text{Im}(\tau)$ که $k = \ell/16G$.

$$Z_{*,1}(\tau) = |q\bar{q}|^{-k} \quad (6)$$

این نتیجه واقعا درخورِ توجه است.

دسته‌بندی فضازمان‌های کلاسیکِ فرینه $\xleftarrow{\text{با هدف}}$ محاسبه‌ی انتگرالِ مسیرِ گرانشی.
به‌لطفِ تبدیلاتِ خشتی چنبره

$$Z_{c,d}(\tau) = Z_{\bullet,1}(\gamma\tau)$$

$$Z(\tau) = \sum_{c,d} Z_{c,d}(\tau) = \sum_{c \geq \bullet, (c,d)=1} Z_{\bullet,1}((a\tau + b)/(c\tau + d)). \quad (5)$$

تقریبِ خام: جاگذاریِ فرینه‌های کلاسیک در (۱).
با جاگذاریِ در کنش (۲) $\xleftarrow{\text{با هدف}}$ $I = -4\pi k \text{Im}(\tau)$ که $k = \ell/16G$.

$$Z_{\bullet,1}(\tau) = |q\bar{q}|^{-k} \quad (6)$$

این نتیجه واقعا درخورِ توجه است.

دسته‌بندی فضازمان‌های کلاسیکِ فرینه $\xleftarrow{\text{با هدف}}$ محاسبه‌ی انتگرالِ مسیرِ گرانشی.
به‌لطفِ تبدیلاتِ خشتیِ چنبره

$$Z_{c,d}(\tau) = Z_{\bullet,1}(\gamma\tau)$$

$$Z(\tau) = \sum_{c,d} Z_{c,d}(\tau) = \sum_{c \geq \bullet, (c,d)=1} Z_{\bullet,1}((a\tau + b)/(c\tau + d)). \quad (5)$$

تقریبِ خام: جاگذاریِ فرینه‌های کلاسیک در (۱).
با جاگذاریِ در کنش (۲) $\xleftarrow{\text{با هدف}}$ $I = -4\pi k \text{Im}(\tau)$ که $k = \ell/16G$.

$$Z_{\bullet,1}(\tau) = |q\bar{q}|^{-k} \quad (6)$$

این نتیجه واقعا درخورِ توجه است.

دسته‌بندی فضا‌زمان‌های کلاسیکِ فرینه $\xleftarrow{\text{با هدف}}$ محاسبه‌ی انتگرالِ مسیرِ گرانشی.
به‌لطفِ تبدیلاتِ خشتی چنبره

$$Z_{c,d}(\tau) = Z_{\bullet,1}(\gamma\tau)$$

$$Z(\tau) = \sum_{c,d} Z_{c,d}(\tau) = \sum_{c \geq \bullet, (c,d)=1} Z_{\bullet,1}((a\tau + b)/(c\tau + d)). \quad (5)$$

تقریبِ خام: جاگذاریِ فرینه‌های کلاسیک در (۱).
با جاگذاریِ در کنش (۲) $\xleftarrow{\text{با هدف}}$ $I = -4\pi k \text{Im}(\tau)$ که $k = \ell/16G$.

$$Z_{\bullet,1}(\tau) = |q\bar{q}|^{-k} \quad (6)$$

این نتیجه واقعا درخورِ توجه است.

یادآوری از (۱۰۵): سهم حالت نخستین $h_L = h_R = c/24$ به تابع پارشِ همدیس به شکل $\exp(-2\pi E \text{Im}(\tau))$ است.

$c = 3\ell/2G = 24k$ ← تابع پارشِ همدیس = تابع پارشِ گرانش کوانتومی^۶.

💡 سهم‌های تک‌حلقه به‌بالا $\equiv$ بقیه‌ی حالات دودمانی نظریه‌ی میدانِ همدیسِ دوگان پس باید از تقریبِ خام (نقطه‌ی زینی) خارج شویم و اختلالات حول فرینه را هم ببینیم.

^۶توجه کنید که اگرچه این بارِ مرکزی دقیقاً همان مقداری را دارد که برای اولین بار در [۱] بدست آمد، اما مقادارش اهمیت فیزیکی ندارد، چرا که با عوض کردن رویه‌ی منتظم‌سازی، مقدارش عوض می‌شود.

یادآوری از (۱۰۵): سهم حالت نخستین $h_L = h_R = c/24$ به تابع پارشِ همدیس به شکل $\exp(-2\pi E \text{Im}(\tau))$ است.

$$c = 24k = 24\ell/G \leftarrow \text{تابع پارشِ همدیس} = \text{تابع پارشِ گرانش کوانتومی}^6.$$

سهم‌های تک حلقه به‌بالا $\equiv$ بقیه‌ی حالات دودمانی نظریه‌ی میدانِ همدیسِ دوگان  پس باید از تقریبِ خام (نقطه‌ی زینی) خارج شویم و اختلالات حول فرینه را هم ببینیم.

^۶توجه کنید که اگرچه این بارِ مرکزی دقیقاً همان مقداری را دارد که برای اولین بار در [۱] بدست آمد، اما مقدارش اهمیتِ فیزیکی ندارد، چرا که با عوض کردن رویه‌ی منتظم‌سازی، مقدارش عوض می‌شود.                         

یادآوری از (۱۰۵): سهم حالت نخستین $h_L = h_R = c/24$ به تابع پارشِ همدیس به شکل $\exp(-2\pi E \text{Im}(\tau))$ است.

$$c = 3\ell/2G = 24k \leftarrow \text{تابع پارشِ همدیس} = \text{تابع پارشِ گرانش کوانتومی}^6.$$

💡 سهم‌های تک‌حلقه به‌بالا $\equiv$ بقیه‌ی حالات دودمانی نظریه‌ی میدانِ همدیسِ دوگان پس باید از تقریبِ خام (نقطه‌ی زینی) خارج شویم و اختلالات حول فرینه را هم ببینیم.

توجه کنید که اگرچه این بارِ مرکزی دقیقاً همان مقداری را دارد که برای اولین بار در [۱] بدست آمد، اما مقدارش اهمیتِ فیزیکی ندارد، چرا که با عوض کردن رویه‌ی منتظم‌سازی، مقدارش عوض می‌شود.                            

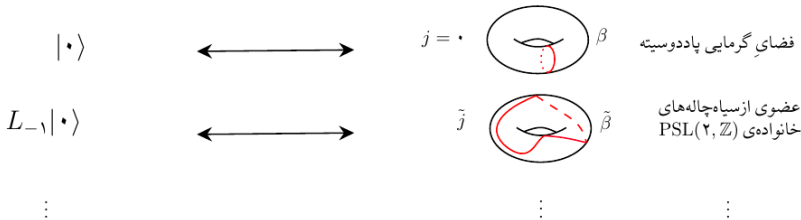
یادآوری از (۱۰۵): سهم حالت نخستین $h_L = h_R = c/24$ به تابع پارشِ همدیس به شکل $\exp(-2\pi E \text{Im}(\tau))$ است.

$$c = 24k = 24\ell/2G \leftarrow \text{تابع پارشِ همدیس} = \text{تابع پارشِ گرانش کوانتومی}^{\vee}.$$

💡 سهم‌های تک حلقه به بالا $\equiv$ بقیه‌ی حالات دودمانی نظریه‌ی میدانِ همدیسِ دوگان پس باید از تقریبِ خام (نقطه‌ی زینی) خارج شویم و اختلالات حول فرینه را هم ببینیم.

$$c = \frac{24\ell}{2G} \text{ میدانِ همدیس با}$$

گرانش کوانتومی مجانباً پاددوسیته‌ی سه‌بعدی



شکل: تناظرِ حالاتِ نظریه‌ی میدانِ همدیسِ روی چنبره با حالاتِ گرانش کوانتومی.

^۷ توجه کنید که اگرچه این بارِ مرکزی دقیقاً همان مقداری را دارد که برای اولین بار در [۱] بدست آمد، اما

مقدارِ اهمیتِ فیزیکی ندارد، چرا که با عوض کردن رویه‌ی منتظم‌سازی، مقدارِش عوض می‌شود.

کوانتشِ گرانشِ سه‌بعدی به زبانِ ساده

قصه: کوانتشِ گرانشِ مجانباً پاددوسیه به کمکِ برنامه‌ی کوانتشِ هندسی.
خمینه‌ی فضای فاز $\mathcal{P} + 2$ - فرم هم‌تافته‌ی ω روی آن $\longleftarrow$ شروع کوانتش

فضای فازِ موردِ نظرِ ما $\longleftarrow$ تمامیِ متریک‌های مجانباً پاددوسیه (Brown-Henneaux)

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 - \left(r dx^+ - \frac{4G\ell}{r} \bar{p}(x^-) dx^- \right) \left(r dx^- - \frac{4G\ell}{r} p(x^+) dx^+ \right)$$

که $p(x^+)$ و $\bar{p}(x^-)$ دو تابع دلخواه 2π -متناوب هستند.

یعنی، فضای فازِ گرانشی $\text{Diff}(S^1) \times \text{Diff}(S^1)$.

تبدیل‌های طول‌پای فضا‌زمان‌ها باعث اضافه‌شماری $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ می‌شوند. بنابراین

$$\mathcal{P} = \frac{\text{Diff}(S^1) \times \text{Diff}(S^1)}{\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \text{SL}(2, \mathbb{R})} = \left(\frac{\text{Diff}(S^1)}{\text{SL}(2, \mathbb{R})} \right)^2 \quad (V)$$

کوانتشِ گرانشِ سه‌بعدی به زبانِ ساده

قصه: کوانتشِ گرانشِ مجانباً پاددوسیه به کمکِ برنامه‌ی کوانتشِ هندسی.
خمینه‌ی فضای فاز $\mathcal{P} + 2$ - فرم هم‌تافته‌ی ω روی آن $\leftarrow$ شروع کوانتش

فضای فازِ موردِ نظرِ ما $\leftarrow$ تمامیِ متریک‌های مجانباً پاددوسیه (Brown-Henneaux)

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 - \left(r dx^+ - \frac{4G\ell}{r} \bar{p}(x^-) dx^- \right) \left(r dx^- - \frac{4G\ell}{r} p(x^+) dx^+ \right)$$

که $p(x^+)$ و $\bar{p}(x^-)$ دو تابع دلخواه 2π - متناوب هستند.

یعنی، فضای فازِ گرانشی $\text{Diff}(S^1) \times \text{Diff}(S^1)$.

تبدیل‌های طول‌پای فضا زمان‌ها باعث اضافه‌شماری $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ می‌شوند. بنابراین

$$\mathcal{P} = \frac{\text{Diff}(S^1) \times \text{Diff}(S^1)}{\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \text{SL}(2, \mathbb{R})} = \left(\frac{\text{Diff}(S^1)}{\text{SL}(2, \mathbb{R})} \right)^2 \quad (V)$$

کوانتشِ گرانشِ سه‌بعدی به زبانِ ساده

قصه: کوانتشِ گرانشِ مجانباً پاددوسیه به کمکِ برنامه‌ی کوانتشِ هندسی.
خمینه‌ی فضای فاز $\mathcal{P} + 2$ - فرم هم‌تافته‌ی ω روی آن $\leftarrow$ شروع کوانتش

فضای فازِ موردِ نظرِ ما $\leftarrow$ تمامیِ متریک‌های مجانباً پاددوسیه (Brown-Henneaux)

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 - \left(r dx^+ - \frac{4G\ell}{r} \bar{p}(x^-) dx^- \right) \left(r dx^- - \frac{4G\ell}{r} p(x^+) dx^+ \right)$$

که $p(x^+)$ و $\bar{p}(x^-)$ دو تابع دلخواه 2π -متناوب هستند.

یعنی، فضای فازِ گرانشی $\text{Diff}(S^1) \times \text{Diff}(S^1)$.

تبدیل‌های طول‌پای فضا‌زمان‌ها باعث اضافه‌شماری $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ می‌شوند. بنابراین

$$\mathcal{P} = \frac{\text{Diff}(S^1) \times \text{Diff}(S^1)}{\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \text{SL}(2, \mathbb{R})} = \left(\frac{\text{Diff}(S^1)}{\text{SL}(2, \mathbb{R})} \right)^2 \quad (7)$$

$\mathcal{P}$: مدار هم‌الحاقی عنصر واحد گروه ویت + ۲ - فرم هم‌تافتی Kirillov-Kostant $([۷, ۶])$ ← توجه معطوف به فضای حالات است.

کوانتش فضای همگن G/H

- ◀ فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ نمایشی از توسعهی مرکزی $\mathfrak{g}$
- ◀ خلا تحت تبدیل H ناورد است.



چقدر جالب!

$$\widetilde{\text{Diff}}(S^1) \xleftarrow{\text{توسعهی مرکزی}} \text{Diff}(S^1)$$

فضای هیلبرت گرانشی ← مازول‌های ورما

$$\text{SL}(2, \mathbb{R}) \cong \text{تبدیلات هم‌دیس سرتاسری (تمام‌ریخت)} \xleftarrow{\text{ناوردا تحت}} \text{خلا ویراسورو}$$



کوانتش گرانش سه‌بعدی مجانباً پاددوسیته = نظریه‌ی میدان هم‌دیس!

$\mathcal{P}$: مدار هم‌الحاقی عنصر واحد گروه ویت + ۲ - فرم هم‌تافتهی Kirillov-Kostant $([۷, ۶])$ ← توجه معطوف به فضای حالات است.

کوانتش فضای همگن G/H

- ◀ فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ نمایشی از توسعهی مرکزی $\mathfrak{g}$
- ◀ خلا تحت تبدیل H ناورد است.



چقدر جالب!

$$\widetilde{\text{Diff}}(S^1) \xleftarrow{\text{توسعهی مرکزی}} \text{Diff}(S^1)$$

فضای هیلبرت گرانشی ← مازول‌های ورما

$$\text{SL}(2, \mathbb{R}) \cong \text{تبدیلات هم‌دیس سرتاسری (تمام‌ریخت)} \xleftarrow{\text{ناوردا تحت}} \text{خلا ویراسورو}$$



کوانتش گرانش سه‌بعدی مجانبا پاددوسیته = نظریه‌ی میدان هم‌دیس!

$\mathcal{P}$: مدار هم‌الحاقی عنصر واحد گروه ویت + ۲ - فرم هم‌تافته‌ی Kirillov-Kostant $([۷, ۶])$ ← توجه معطوف به فضای حالات است.

کوانتش فضای همگن G/H

- ◀ فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ نمایشی از توسعه‌ی مرکزی $\mathfrak{g}$
- ◀ خلا تحت تبدیل H ناورد است.



چقدر جالب!

$$\widetilde{\text{Diff}}(S^1) \xleftarrow{\text{توسعه‌ی مرکزی}} \text{Diff}(S^1)$$

فضای هیلبرت گرانشی ← مازول‌های ورما

خلا ویراسورو ←^{ناوردا تحت} تبدیلاتِ همدیسِ سرتاسری (تمام‌ریخت) $\text{SL}(2, \mathbb{R}) \cong$



کوانتش گرانش سه‌بعدی مجانبا پاددوسیته = نظریه‌ی میدان همدیس!

حالاتِ گرانشِ کوانتومی پاددوسیه $\equiv$ حالاتِ دودمانیِ نظریه میدانِ همدیس

$$.E = -k + \sum_{n=1}^{\infty} na_n \text{ با انرژی } \prod_{n=1}^{\infty} L_{-n}^{a_n} |0\rangle$$

نمایش یکانیِ جبرِ ویراسورو = ضربِ تانسوریِ دو مازولِ ورما $\xrightarrow{\text{کوانتش}} (\text{Diff}(S^1)/\text{SL}(2, \mathbb{R}))^2$
 به‌طورِ کاملاًِ طبیعی: حالاتِ کوانتومی = حالاتِ نظریه‌ی میدانِ همدیس.
 معنایِ دوگانگیِ گرانشِ کوانتومی پاددوسیه با نظریه‌ی میدانِ همدیس روشن‌تر شد.

حالاتِ دودمانیِ فوق در مراجع، با نام «برانگیختگی‌های مرزی Brown-Henneaux»، یا
 «گراویتون‌های مرزی» هم شناخته می‌شوند.

حالات گرانش کوانتومی پاددوسیه $\equiv$ حالات دودمانی نظریه میدان همدیس

$$.E = -k + \sum_{n=1}^{\infty} na_n \text{ با انرژی } \prod_{n=1}^{\infty} L_{-n}^{a_n} |0\rangle$$

نمایش یکانی جبر ویراسورو = ضرب تانسوری دو ماژول ورما $\xrightarrow{\text{کوانتش}} (\text{Diff}(S^1)/\text{SL}(2, \mathbb{R}))^2$
 به طور کاملاً طبیعی: حالات کوانتومی = حالات نظریه میدان همدیس.
 معنای دوگانی گرانش کوانتومی پاددوسیه با نظریه میدان همدیس روشنتر شد.

حالات دودمانی فوق در مراجع، با نام «برانگیختگی های مرزی Brown-Henneaux»، یا
 «گراویتون های مرزی» هم شناخته می شوند.

محاسبه‌ی تابع پارش « تقریب پخته‌تر

راه خروج از تقریب خام (۶)؟ جمع روی تمامی حالات گرانش کوانتومی $\leftarrow$ زبان انتگرال مسیر
در نظرگیری جواب‌های کلاسیک + تمامی تصحیحات کوانتومی به کنش اینشتین-هیلبرت.

$$Z(\tau, \bar{\tau}) \equiv \int_{\partial\mathcal{M}=T^\tau} [Dg_{\mu\nu}] e^{-S} = \sum_{g_0} e^{-cS(g_0) + S^{(1)}(g_0) + \mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon})} \quad (8)$$

اندکی جزئیات

از لحاظ محاسباتی باید تصحیح تک حلقه را به انتگرال مسیر پیدا کنیم. تابع پارش گرانش کوانتومی در مرتبه‌ی تک حلقه با روش تصویر و هسته‌ی گرمایی قابل انجام هست و در میان تک حلقه، در توافق کامل با مشخصه‌ی خلا ویراسورو است [۱۱].
راه معادل $\leftarrow$ تابع پارش نظریه‌ی میدان همدیس
(تک حلقه- کامل بودن گرانش کوانتومی مجانباً پاددوسسته)

محاسبه‌ی تابع پارش « تقریب پخته‌تر

راه خروج از تقریب خام (۶)؟ جمع روی تمامی حالات گرانش کوانتومی $\leftarrow$ زبان انتگرال مسیر
در نظرگیری جواب‌های کلاسیک + تمامی تصحیحات کوانتومی به کنش اینشتین-هیلبرت.

$$Z(\tau, \bar{\tau}) \equiv \int_{\partial\mathcal{M}=T^\tau} [Dg_{\mu\nu}] e^{-S} = \sum_{g_*} e^{-cS(g_*) + S^{(1)}(g_*) + \mathcal{O}(\frac{1}{c})} \quad (8)$$

اندکی جزئیات

از لحاظ محاسباتی باید تصحیح تک حلقه را به انتگرال مسیر پیدا کنیم. تابع پارش گرانش کوانتومی در مرتبه‌ی تک حلقه با روش تصویر و هسته‌ی گرمایی قابل انجام هست و در میان تک حلقه، در توافق کامل با مشخصه‌ی خلا ویراسورو است [۱۱].
راه معادل $\leftarrow$ تابع پارش نظریه‌ی میدان همدیس
(تک حلقه- کامل بودن گرانش کوانتومی مجانباً پاددوسسته)

انتگرال‌گیری تک‌حلقه نتیجه‌ی زیر را می‌دهد [۱۱].

$$Z_{\cdot,1}(\tau) = |\bar{q}q|^{-k} \frac{1}{\prod_{n=2}^{\infty} |1 - q^n|^2} \quad (9)$$

این، همان مشخصه‌ی خلا ویراسوروست.

$$\chi_h(\tau) = \frac{q^{h - \frac{c-1}{24}}}{\eta(\tau)} \quad (10)$$

تعریف تابع اتا

$$\eta(\tau) = e^{\frac{i\pi\tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\pi i\tau}) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad (11)$$

کاربرد: تسهیل بررسیِ ناورداییِ خشتی.

بازنویسی برحسب تابع اتایِ ددکیند

$$Z_{\cdot,1}(\tau) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} |\bar{q}q|^{-(k-1/24)} |1 - q|^2. \quad (12)$$

انتگرال‌گیری تک‌حلقه نتیجه‌ی زیر را می‌دهد [۱۱].

$$Z_{\cdot,1}(\tau) = |\bar{q}q|^{-k} \frac{1}{\prod_{n=2}^{\infty} |1 - q^n|^2} \quad (9)$$

این، همان مشخصه‌ی خلا ویراسوروست.

$$\chi_h(\tau) = \frac{q^{h - \frac{c-1}{24}}}{\eta(\tau)} \quad (10)$$

تعریفِ تابعِ اتا

$$\eta(\tau) = e^{\frac{i\pi\tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\pi i\tau}) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad (11)$$

کاربرد: تسهیل بررسیِ ناورداییِ خشتی.

بازنویسی برحسبِ تابعِ اتایِ ددکیند

$$Z_{\cdot,1}(\tau) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} |\bar{q}q|^{-(k-1/24)} |1 - q|^2. \quad (12)$$

انتگرال گیری تک حلقه نتیجه ی زیر را می دهد [۱۱].

$$Z_{\cdot,1}(\tau) = |\bar{q}q|^{-k} \frac{1}{\prod_{n=2}^{\infty} |1 - q^n|^2} \quad (9)$$

این، همان مشخصه ی خلا ویراسوروست.

$$\chi_h(\tau) = \frac{q^{h - \frac{c-1}{24}}}{\eta(\tau)} \quad (10)$$

تعریف تابع اتا

$$\eta(\tau) = e^{\frac{i\pi\tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\pi i\tau}) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad (11)$$

کاربرد: تسهیل بررسیِ ناورداییِ خشتی.

بازنویسی برحسبِ تابعِ اتایِ ددکیند

$$Z_{\cdot,1}(\tau) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} |\bar{q}q|^{-(k-1/24)} |1 - q|^2. \quad (12)$$

صورتِ نهایی تابع پارشِ گرانس کوانتومی سه‌بعدی و درسهای آن

با داشتن $Z_{\bullet,1}(\tau) \leftarrow \sum_{c \geq \bullet, (c,d)=1} (سری پوانکاره)$.

$$Z(\tau) = \sum_{c \geq \bullet, (c,d)=1} Z_{\bullet,1}(\gamma\tau) \quad (۱۳)$$

که $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ و $\gamma\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ چالش‌های این محاسبه:

- ◀ واگرایی جمع و منتظم‌سازی $\leftarrow$ قاعده‌مندترین منتظم‌سازی: زتای ریمان + توسعه‌ی تحلیلی نتیجه.
- ◀ انواع روش‌های ریاضیاتی: بازجمع پواسون، تبدیل فوریه، انتگرال‌های بسل و جمع‌های عجیب و غریب ریاضی (!).
- ◀ مجبوریم که به شکل اختلالی به پارامترِ خشتی نگاه کنیم.

صورتِ نهایی تابع پارشِ گرانث کوانتومی سه‌بعدی و درسهای آن

با داشتن $Z_{\bullet,1}(\tau) \leftarrow \sum_{c \geq \bullet, (c,d)=1} (\text{سری پوانکاره})$.

$$Z(\tau) = \sum_{c \geq \bullet, (c,d)=1} Z_{\bullet,1}(\gamma\tau) \quad (13)$$

که $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ و $\gamma\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ چالش‌های این محاسبه:

- ◀ واگرایی جمع و منتظم‌سازی $\leftarrow$ قاعده‌مندترین منتظم‌سازی: زتای ریمان + توسعه‌ی تحلیلی نتیجه.
- ◀ انواع روش‌های ریاضیاتی: بازجمع پواسون، تبدیل فوریه، انتگرال‌های بسل و جمع‌های عجیب و غریب ریاضی (!).
- ◀ مجبوریم که به شکل اختلالی به پارامترِ خشتی نگاه کنیم.

با نوشتن $\tau = x + iy$ ، در اولین مرتبه می‌رسیم به

$$Z = Z_{\cdot,1} + \frac{1}{|\eta|^2} (-\epsilon + \mathcal{O}(y^{-1})) \quad (14)$$

این رابطه واقعا عجیب است!

◀ تا $E = -1/12$ طیفِ گرانِش کوانتومی $\equiv$ طیفِ مدهای برانگیخته‌ی Brown-Henneaux ؛
ورای آن، تبهگنی منفی شش است.

◀ تصحیحات از مرتبِ $\mathcal{O}(1/y)$ — در تناقض با دوگان بودن با یک سامانه‌ی کوانتومی است.

$$\text{Tr} \left(\exp(-\beta H) \right)$$

نتیجه‌ی اولیه

جمعِ سهم‌های شناخته‌شده در تابع پارشِ گرانِش سه‌بعدیِ خالصِ مجانباً پاددوسیه، از لحاظ فیزیکی و تمام‌نگاری معنادار نیست.

با نوشتن $\tau = x + iy$ ، در اولین مرتبه می‌رسیم به

$$Z = Z_{\cdot,1} + \frac{1}{|\eta|^2} (-\epsilon + \mathcal{O}(y^{-1})) \quad (14)$$

این رابطه واقعا عجیب است!

▶ تا $E = -1/12$ طیفِ گرانش کوانتومی $\equiv$ طیفِ مدهای برانگیخته‌ی Brown-Henneaux ؛
ورای آن، تبهگنی منفی شش است.

▶ تصحیحات از مرتبِ $\mathcal{O}(1/y)$ ← در تناقض با دوگان بودن با یک سامانه‌ی کوانتومی است.

$$\text{Tr}(\exp(-\beta H))$$

نتیجه‌ی اولیه

جمعِ سهم‌های شناخته‌شده در تابع پارشِ گرانش سه‌بعدیِ خالصِ مجانباً پاددوسیه، از لحاظ
فیزیکی و تمام‌نگاری معنادار نیست.

با نوشتن $\tau = x + iy$ ، در اولین مرتبه می‌رسیم به

$$Z = Z_{\cdot,1} + \frac{1}{|\eta|^2} (-\epsilon + \mathcal{O}(y^{-1})) \quad (14)$$

این رابطه واقعا عجیب است!

▶ تا $E = -1/12$ طیفِ گرانش کوانتومی $\equiv$ طیفِ مدهای برانگیخته‌ی Brown-Henneaux ؛
ورای آن، تبهگنی منفی شش است.

▶ تصحیحات از مراتبِ $\mathcal{O}(1/y)$ ← در تناقض با دوگان بودن با یک سامانه‌ی کوانتومی است.

$$\text{Tr}(\exp(-\beta H))$$

نتیجه‌ی اولیه

جمعِ سهم‌های شناخته‌شده در تابع پارشِ گرانش سه‌بعدیِ خالصِ مجانباً پاددوسیه، از لحاظ
فیزیکی و تمام‌نگاری معنادار نیست.

با نوشتن $\tau = x + iy$ ، در اولین مرتبه می‌رسیم به

$$Z = Z_{\cdot,1} + \frac{1}{|\eta|^2} (-\epsilon + \mathcal{O}(y^{-1})) \quad (14)$$

این رابطه واقعا عجیب است!

▶ تا $E = -1/12$ طیفِ گرانش کوانتومی $\equiv$ طیفِ مدهای برانگیخته‌ی Brown-Henneaux ؛
ورای آن، تبهگنی منفی شش است.

▶ تصحیحات از مراتبِ $\mathcal{O}(1/y)$ ← در تناقض با دوگان بودن با یک سامانه‌ی کوانتومی است.

$$\text{Tr}(\exp(-\beta H))$$

نتیجه‌ی اولیه

جمعِ سهم‌های شناخته‌شده در تابع پارشِ گرانش سه‌بعدی خالصِ مجانباً پاددوسیه، از لحاظ فیزیکی و تمام‌نگاری معنادار نیست.

نگاهی به تصحیحات مرتبه بالاتر (۱۵)

$$Z = Z_{.,1} + \frac{1}{|\eta|^2} \left(-\epsilon + \frac{(\pi^2 - \epsilon\pi)(11 + 24k)}{9\zeta(3)} y^{-1} + \frac{5(53\pi^6 - 882\pi^2) + 528(\pi^6 - 90\pi^2)k + 576(\pi^6 - 90\pi^2)k^2}{2430\zeta(5)} y^{-2} + \mathcal{O}(y^{-3}) \right)$$

- ◀ صفر نشدن تصحیحات مرتبه‌ی بالا، اصلاح طیف را فوق‌العاده دشوارتر می‌کند.
- ◀ ضرایب y اگرچه مثبت هستند، اما متأسفانه طبیعی نیستند. خلاف انتظارِ ما از نظریه‌ی میدان همدیس.
- ◀ تجزیه‌ی تمام‌ریخت تابع پارش هم دیده نمی‌شود؛ این را هم از نظریه‌ی میدان همدیس دوگان انتظار داشتیم [۸].
- ◀ تنها موردِ امیدوارکننده: بازتولیدِ درستِ تصحیحات لگاریتمی به آنتروپی سیاه‌چاله‌ی BTZ در هنگرد ریزکانونی.

پس شرایط بسیار ناامیدکننده با رگه‌هایی از امیدواری است.

نگاهی به تصحیحات مرتبه بالاتر (۱۵)

$$Z = Z_{.,1} + \frac{1}{|\eta|^2} \left(-\epsilon + \frac{(\pi^2 - \epsilon\pi)(11 + 24k)}{9\zeta(3)} y^{-1} + \frac{5(53\pi^6 - 882\pi^2) + 528(\pi^6 - 90\pi^2)k + 576(\pi^6 - 90\pi^2)k^2}{2430\zeta(5)} y^{-2} + \mathcal{O}(y^{-3}) \right)$$

- ◀ صفر نشدن تصحیحات مرتبه‌ی بالا، اصلاح طیف را فوق‌العاده دشوارتر می‌کند.
- ◀ ضرایب y اگرچه مثبت هستند، اما متأسفانه طبیعی نیستند. خلاف انتظار ما از نظریه‌ی میدان همدیس.
- ◀ تجزیه‌ی تمام‌ریخت تابع پارش هم دیده نمی‌شود؛ این را هم از نظریه‌ی میدان همدیس دوگان انتظار داشتیم [۸].
- ◀ تنها مورد امیدوارکننده: بازتولید درست تصحیحات لگاریتمی به آنتروپی سیاه‌چاله‌ی BTZ در هنگرد ریزکانونی.

پس شرایط بسیار ناامیدکننده با رگه‌هایی از امیدواری است.

نگاهی به تصحیحات مرتبه بالاتر (۱۵)

$$Z = Z_{.,1} + \frac{1}{|\eta|^2} \left(-\epsilon + \frac{(\pi^2 - \epsilon\pi)(11 + 24k)}{9\zeta(3)} y^{-1} \right. \\ \left. + \frac{5(53\pi^6 - 882\pi^2) + 528(\pi^6 - 90\pi^2)k + 576(\pi^6 - 90\pi^2)k^2}{2430\zeta(5)} y^{-2} + \mathcal{O}(y^{-3}) \right)$$

- ◀ صفر نشدن تصحیحات مرتبه‌ی بالا، اصلاح طیف را فوق‌العاده دشوارتر می‌کند.
- ◀ ضرایب y اگرچه مثبت هستند، اما متأسفانه طبیعی نیستند. خلاف انتظار ما از نظریه‌ی میدان همدیس.
- ◀ تجزیه‌ی تمام‌ریخت تابع پارش هم دیده نمی‌شود؛ این را هم از نظریه‌ی میدان همدیس دوگان انتظار داشتیم [۸].
- ◀ تنها مورد امیدوارکننده: بازتولید درست تصحیحات لگاریتمی به آنتروپی سیاه‌چاله‌ی BTZ در هنگرد ریزکانونی.

پس شرایط بسیار ناامیدکننده با رگه‌هایی از امیدواری است.

نگاهی به تصحیحات مرتبه بالاتر (۱۵)

$$Z = Z_{.,1} + \frac{1}{|\eta|^2} \left(-\epsilon + \frac{(\pi^2 - \epsilon\pi)(11 + 24k)}{9\zeta(3)} y^{-1} \right. \\ \left. + \frac{5(53\pi^6 - 882\pi^2) + 528(\pi^6 - 90\pi^2)k + 576(\pi^6 - 90\pi^2)k^2}{2430\zeta(5)} y^{-2} + \mathcal{O}(y^{-3}) \right)$$

- ◀ صفر نشدن تصحیحات مرتبه‌ی بالا، اصلاح طیف را فوق‌العاده دشوارتر می‌کند.
- ◀ ضرایب y اگرچه مثبت هستند، اما متأسفانه طبیعی نیستند. خلاف انتظار ما از نظریه‌ی میدان همدیس.
- ◀ تجزیه‌ی تمام‌ریخت تابع پارش هم دیده نمی‌شود؛ این را هم از نظریه‌ی میدان همدیس دوگان انتظار داشتیم [۸].
- ◀ تنها مورد امیدوارکننده: بازتولید درست تصحیحات لگاریتمی به آنروپی سیاه‌چاله‌ی BTZ در هنگرد ریزکانونی.

پس شرایط بسیار ناامیدکننده با رگه‌هایی از امیدواری است.

نگاهی به تصحیحات مرتبه بالاتر (۱۵)

$$Z = Z_{.,1} + \frac{1}{|\eta|^2} \left(-\epsilon + \frac{(\pi^2 - \epsilon\pi)(11 + 24k)}{9\zeta(3)} y^{-1} \right. \\ \left. + \frac{5(53\pi^6 - 882\pi^2) + 528(\pi^6 - 90\pi^2)k + 576(\pi^6 - 90\pi^2)k^2}{2430\zeta(5)} y^{-2} + \mathcal{O}(y^{-3}) \right)$$

- ◀ صفر نشدن تصحیحات مرتبه‌ی بالا، اصلاح طیف را فوق‌العاده دشوارتر می‌کند.
- ◀ ضرایب y اگرچه مثبت هستند، اما متأسفانه طبیعی نیستند. خلاف انتظار ما از نظریه‌ی میدان همدیس.
- ◀ تجزیه‌ی تمام‌ریخت تابع پارش هم دیده نمی‌شود؛ این را هم از نظریه‌ی میدان همدیس دوگان انتظار داشتیم [۸].
- ◀ تنها مورد امیدوارکننده: بازتولید درست تصحیحات لگاریتمی به آنتروپی سیاه‌چاله‌ی BTZ در هنگرد ریزکانونی.

پس شرایط بسیار ناامیدکننده با رگه‌هایی از امیدواری است.

چه اشتباهی کردیم که این طیفِ غیرفیزیکی را پیدا کردیم؟

❶ راحت‌ترین کار: گرانش کوانتومی مجانباً پاددوسپته‌ی خالص اصلاً خودسازگار نیست.
— افزودنِ درجاتِ آزادیِ مادی برای اصلاحِ طیف.

❷ سهم‌های ناشناخته و مهم برای طیف (?)

درسالهای اخیر، فهمیدیم که سناریوی دوم محتمل‌تر است.

- ❶ چه اشتباهی کردیم که این طیفِ غیرفیزیکی را پیدا کردیم؟
راحت‌ترین کار: گرانش کوانتومی مجانباً پاددوسیته‌ی خالص اصلاً خودسازگار نیست.
— افزودنِ درجاتِ آزادیِ مادی برای اصلاحِ طیف.
 - ❷ سهم‌های ناشناخته و مهم برای طیف (?)
- درس‌الهای اخیر، فهمیدیم که سناریوی دوم محتمل‌تر است.

- ❶ چه اشتباهی کردیم که این طیفِ غیرفیزیکی را پیدا کردیم؟
راحت‌ترین کار: گرانش کوانتومی مجانباً پاددوسیته‌ی خالص اصلاً خودسازگار نیست.
— افزودنِ درجاتِ آزادیِ مادی برای اصلاحِ طیف.
- ❷ سهم‌های ناشناخته و مهم برای طیف (?)

درسالهای اخیر، فهمیدیم که سناریوی دوم محتمل‌تر است.

- ❶ چه اشتباهی کردیم که این طیفِ غیرفیزیکی را پیدا کردیم؟
راحت‌ترین کار: گرانش کوانتومی مجانباً پاددوسیته‌ی خالص اصلاً خودسازگار نیست.
— افزودنِ درجاتِ آزادیِ مادی برای اصلاحِ طیف.
 - ❷ سهم‌های ناشناخته و مهم برای طیف (?)
- درس‌الهای اخیر، فهمیدیم که سناریوی دوم محتمل‌تر است.

- مدل‌های خودسازگارِ گرانش کوانتومی سه‌بعدی از نظریه ابررسمان روی $\text{AdS}_3 \times S^3 \times T^4$.
- شامل غشاهایی $(1+1)$ - بعدی گسترده در فضا زمان (رسمان‌های کیهانی).
- تلاش برای بازیابی تجزیه‌ی تمام‌ریختِ تابع پارش $\longleftrightarrow$ با توجه (12)

$$Z_{\bullet,1} = F_k(q)F_k(\bar{q}) \quad (16)$$

$$F_k(q) = q^{-k} \prod_{n=2}^{\infty} (1 - q^n)^{-1} \text{ که}$$

از دست رفتنِ تجزیه‌ی تمام‌ریخت

$$Z = \sum_{\gamma \in W} F_k(q)|_{\gamma} F_k(\bar{q})|_{\gamma} \quad (17)$$

- ۱ مدل‌های خودسازگارِ گرانش کوانتومی سه‌بعدی از نظریه ابررسمان روی $\text{AdS}_3 \times S^3 \times T^4$.
- شامل غشاهایی (۱+۱) - بعدی گسترده در فضا زمان (رسمان‌های کیهانی).
- ۲ تلاش برای بازیابی تجزیه‌ی تمام‌ریختِ تابع پارش $\leftarrow$ با توجه (۱۲)

$$Z_{\bullet,1} = F_k(q)F_k(\bar{q}) \quad (16)$$

$$F_k(q) = q^{-k} \prod_{n=2}^{\infty} (1 - q^n)^{-1} \text{ که}$$

از دست رفتن تجزیه‌ی تمام‌ریخت

$$Z = \sum_{\gamma \in W} F_k(q)|_{\gamma} F_k(\bar{q})|_{\gamma} \quad (17)$$

- ۱ مدل‌های خودسازگارِ گرانش کوانتومی سه‌بعدی از نظریه ابررسمان روی $\text{AdS}_3 \times S^3 \times T^4$.
- شامل غشاهایی $(1+1)$ -بعدی گسترده در فضا-زمان (رسمان‌های کیهانی).
- ۲ تلاش برای بازیابی تجزیه‌ی تمام‌ریختِ تابع پارش $\leftarrow$ با توجه (12)

$$Z_{\bullet,1} = F_k(q)F_k(\bar{q}) \quad (16)$$

$$F_k(q) = q^{-k} \prod_{n=2}^{\infty} (1 - q^n)^{-1} \text{ که}$$

از دست رفتنِ تجزیه‌ی تمام‌ریخت

$$Z = \sum_{\gamma \in W} F_k(q)|_{\gamma} F_k(\bar{q})|_{\gamma} \quad (17)$$

راه حل (؟): بازنویسی جمع

$$\hat{Z} = \left(\sum_{\gamma \in W} F_k(q) |_{\gamma} \right) \left(\sum_{\gamma' \in W} F_k(\bar{q}) |_{\gamma'} \right) \quad (18)$$

این جمع چه معنایی می تواند داشته باشد؟ معادل با کنش کلاسیکی

$$I_{\gamma, \gamma'} = 2\pi i (\gamma\tau - \gamma'\bar{\tau}) \quad (19)$$

جواب ها جواب مختلط معادله ی اینشتین هستند (!).

البته این راه به دو دلیل مسدود است.

هیچ خانواده ای از جواب های مختلط معادله ی اینشتین در خلا پاددوسیته پیدا نشده. ۱

حتی با وجود جواب — به دلیل محدودیت های انتگرال مسیر گرانشی، راهی برای بدست آوردن سهم اختلالات حول فضا زمان های فرینه نداریم. ۲

راه حل (؟): بازنویسی جمع

$$\hat{Z} = \left(\sum_{\gamma \in W} F_k(q) |_{\gamma} \right) \left(\sum_{\gamma' \in W} F_k(\bar{q}) |_{\gamma'} \right) \quad (18)$$

این جمع چه معنایی می تواند داشته باشد؟ معادل با کنش کلاسیکی

$$I_{\gamma, \gamma'} = 2\pi i (\gamma\tau - \gamma'\bar{\tau}) \quad (19)$$

جواب ها جواب مختلط معادله ی اینشتین هستند (!).

البته این راه به دو دلیل مسدود است.

هیچ خانواده ای از جواب های مختلط معادله ی اینشتین در خلا پاددوسیته پیدا نشده. *

حتی با وجود جواب $\rightarrow$ به دلیل محدودیت های انتگرال مسیر گرانشی، راهی برای بدست آوردن سهم اختلالات حول فضا زمان های فرینه نداریم. *

راه حل (؟): بازنویسی جمع

$$\hat{Z} = \left(\sum_{\gamma \in W} F_k(q) |_{\gamma} \right) \left(\sum_{\gamma' \in W} F_k(\bar{q}) |_{\gamma'} \right) \quad (18)$$

این جمع چه معنایی می تواند داشته باشد؟ معادل با کنش کلاسیکی

$$I_{\gamma, \gamma'} = 2\pi i (\gamma\tau - \gamma'\bar{\tau}) \quad (19)$$

جواب ها جواب مختلط معادله ی اینشتین هستند (!).

البته این راه به دو دلیل مسدود است.

❶ هیچ خانواده ای از جواب های مختلط معادله ی اینشتین در خلا پاددوسیته پیدا نشده.

❷ حتی با وجود جواب $\longleftrightarrow$ به دلیل محدودیت های انتگرال مسیر گرانشی، راهی برای بدست آوردن سهم اختلالات حول فضا زمان های فرینه نداریم.

نتیجه گیری و مسیرهای آینده

در این ارائه، تا حدی با بحث‌هایی که در گرانش کوانتومی سه‌بعدی مجانباً پاددوسیته مطرح هست، آشنا شدیم. مهم‌ترین پیام‌های این سخنرانی هستند:

- ❶ گرانش کوانتومی مجانباً پاددوسیته و ارتباط چشم‌گیر با نظریه میدان همدیس.
- ❷ شناخت عمیق‌تر گرانش کوانتومی با کمک تابع پارش، آشنایی با مسائل طیف آن.
- ❸ رهیافت‌هایی نوین به مسئله‌ی طیف و گرانش کوانتومی در سه‌بعد.

چه سوال‌هایی در ادامه مهم‌اند؟

- ❶ چه ویژگی‌های جهان‌شمولی از گرانش کوانتومی در ابعاد پایین هستند که در ابعاد بالا هم قابل انتظارند؟
- ❷ وضعیت دوگانی پیمان‌ه/گرانش برای گرانش کوانتومی مجانباً پاددوسیته دقیقاً چیست؟
- ❸ آیا می‌توانیم تصویر تمام‌نگاری درستی برای فضا‌زمان‌های مجانباً تخت و مجانباً دوسیته بسازیم؟

در این ارائه، تا حدی با بحث‌هایی که در گران‌ش کوانتومی سه‌بعدی مجانباً پاددوسیه مطرح هست، آشنا شدیم. مهم‌ترین پیام‌های این سخنرانی هستند:

❶ گران‌ش کوانتومی مجانباً پاددوسیه و ارتباط چشم‌گیر با نظریه میدان همدیس.

❷ شناخت عمیق‌تر گران‌ش کوانتومی با کمک تابع پارش، آشنایی با مسائل طیف آن.

❸ رهیافت‌هایی نوین به مسئله‌ی طیف و گران‌ش کوانتومی در سه‌بعد.

چه سوال‌هایی در ادامه مهم‌اند؟

❶ چه ویژگی‌های جهان‌شمولی از گران‌ش کوانتومی در ابعاد پایین هستند که در ابعاد بالا هم قابل انتظارند؟

❷ وضعیت دوگانی پیمانه/گران‌ش برای گران‌ش کوانتومی مجانباً پاددوسیه دقیقاً چیست؟

❸ آیا می‌توانیم تصویر تمام‌نگاری درستی برای فضا‌زمان‌های مجانباً تخت و مجانباً دوسیه بسازیم؟

در این ارائه، تا حدی با بحث‌هایی که در گرانش کوانتومی سه‌بعدی مجانباً پاددوسیه مطرح هست، آشنا شدیم. مهم‌ترین پیام‌های این سخنرانی هستند:

- ❶ گرانش کوانتومی مجانباً پاددوسیه و ارتباط چشم‌گیر با نظریه میدان همدیس.
- ❷ شناخت عمیق‌تر گرانش کوانتومی با کمک تابع پارش، آشنایی با مسائل طیف آن.
- ❸ رهیافت‌هایی نوین به مسئله‌ی طیف و گرانش کوانتومی در سه‌بعد.

چه سوال‌هایی در ادامه مهم‌اند؟

- ❶ چه ویژگی‌های جهان‌شمولی از گرانش کوانتومی در ابعاد پایین هستند که در ابعاد بالا هم قابل انتظارند؟
- ❷ وضعیت دوگانی پیمانه/گرانش برای گرانش کوانتومی مجانباً پاددوسیه دقیقاً چیست؟
- ❸ آیا می‌توانیم تصویر تمام‌نگاری درستی برای فضا‌زمان‌های مجانباً تخت و مجانباً دوسیه بسازیم؟

در این ارائه، تا حدی با بحث‌هایی که در گرانش کوانتومی سه‌بعدی مجانباً پاددوسیه مطرح هست، آشنا شدیم. مهم‌ترین پیام‌های این سخنرانی هستند:

- ❶ گرانش کوانتومی مجانباً پاددوسیه و ارتباط چشم‌گیر با نظریه میدان همدیس.
- ❷ شناخت عمیق‌تر گرانش کوانتومی با کمک تابع پارش، آشنایی با مسائل طیف آن.
- ❸ رهیافت‌هایی نوین به مسئله‌ی طیف و گرانش کوانتومی در سه‌بعد.

چه سوال‌هایی در ادامه مهم‌اند؟

- ❶ چه ویژگی‌های جهان‌شمولی از گرانش کوانتومی در ابعاد پایین هستند که در ابعاد بالا هم قابل انتظارند؟
- ❷ وضعیت دوگانی پیمانه/گرانش برای گرانش کوانتومی مجانباً پاددوسیه دقیقاً چیست؟
- ❸ آیا می‌توانیم تصویر تمام‌نگاری درستی برای فضا‌زمان‌های مجانباً تخت و مجانباً دوسیه بسازیم؟

در این ارائه، تا حدی با بحث‌هایی که در گرانش کوانتومی سه‌بعدی مجانباً پاددوسیته مطرح هست، آشنا شدیم. مهم‌ترین پیام‌های این سخنرانی هستند:

- ❶ گرانش کوانتومی مجانباً پاددوسیته و ارتباط چشم‌گیر با نظریه میدان همدیس.
- ❷ شناخت عمیق‌تر گرانش کوانتومی با کمک تابع پارش، آشنایی با مسائل طیف آن.
- ❸ رهیافت‌هایی نوین به مسئله‌ی طیف و گرانش کوانتومی در سه‌بعد.

چه سوال‌هایی در ادامه مهم‌اند؟

- ❶ چه ویژگی‌های جهان‌شمولی از گرانش کوانتومی در ابعاد پایین هستند که در ابعاد بالا هم قابل انتظارند؟
- ❷ وضعیت دوگانی پیمانه/گرانش برای گرانش کوانتومی مجانباً پاددوسیته دقیقاً چیست؟
- ❸ آیا می‌توانیم تصویر تمام‌نگاری درستی برای فضا‌زمان‌های مجانباً تخت و مجانباً دوسیته بسازیم؟

در این ارائه، تا حدی با بحث‌هایی که در گرانث کوانتومی سه‌بعدی مجانباً پاددوسیته مطرح هست، آشنا شدیم. مهم‌ترین پیام‌های این سخنرانی هستند:

- ❶ گرانث کوانتومی مجانباً پاددوسیته و ارتباط چشم‌گیر با نظریه میدان همدیس.
- ❷ شناخت عمیق‌تر گرانث کوانتومی با کمک تابع پارش، آشنایی با مسائل طیف آن.
- ❸ رهیافت‌هایی نوین به مسئله‌ی طیف و گرانث کوانتومی در سه‌بعد.

چه سوال‌هایی در ادامه مهم‌اند؟

- ❶ چه ویژگی‌های جهان‌شمولی از گرانث کوانتومی در ابعاد پایین هستند که در ابعاد بالا هم قابل انتظارند؟
- ❷ وضعیت دوگانی پیمانه/گرانث برای گرانث کوانتومی مجانباً پاددوسیته دقیقاً چیست؟
- ❸ آیا می‌توانیم تصویر تمام‌نگاری درستی برای فضا‌زمان‌های مجانباً تخت و مجانباً دوسیته بسازیم؟

در این ارائه، تا حدی با بحث‌هایی که در گرانش کوانتومی سه‌بعدی مجانباً پاددوسیه مطرح هست، آشنا شدیم. مهم‌ترین پیام‌های این سخنرانی هستند:

- ❶ گرانش کوانتومی مجانباً پاددوسیه و ارتباط چشم‌گیر با نظریه میدان همدیس.
- ❷ شناخت عمیق‌تر گرانش کوانتومی با کمک تابع پارش، آشنایی با مسائل طیف آن.
- ❸ رهیافت‌هایی نوین به مسئله‌ی طیف و گرانش کوانتومی در سه‌بعد.

چه سوال‌هایی در ادامه مهم‌اند؟

- ❶ چه ویژگی‌های جهان‌شمولی از گرانش کوانتومی در ابعاد پایین هستند که در ابعاد بالا هم قابل انتظارند؟
- ❷ وضعیت دوگانی پیمانه/گرانش برای گرانش کوانتومی مجانباً پاددوسیه دقیقاً چیست؟
- ❸ آیا می‌توانیم تصویر تمام‌نگاری درستی برای فضا‌زمان‌های مجانباً تخت و مجانباً دوسیه بسازیم؟

در این ارائه، تا حدی با بحث‌هایی که در گرانث کوانتومی سه‌بعدی مجانباً پاددوسیه مطرح هست، آشنا شدیم. مهم‌ترین پیام‌های این سخنرانی هستند:

- ❶ گرانث کوانتومی مجانباً پاددوسیه و ارتباط چشم‌گیر با نظریه میدان همدیس.
- ❷ شناخت عمیق‌تر گرانث کوانتومی با کمک تابع پارش، آشنایی با مسائل طیف آن.
- ❸ رهیافت‌هایی نوین به مسئله‌ی طیف و گرانث کوانتومی در سه‌بعد.

چه سوال‌هایی در ادامه مهم‌اند؟

- ❶ چه ویژگی‌های جهان‌شمولی از گرانث کوانتومی در ابعاد پایین هستند که در ابعاد بالا هم قابل انتظارند؟
- ❷ وضعیت دوگانی پیمانه/گرانث برای گرانث کوانتومی مجانباً پاددوسیه دقیقاً چیست؟
- ❸ آیا می‌توانیم تصویر تمام‌نگاری درستی برای فضازمان‌های مجانباً تخت و مجانباً دوسیه بسازیم؟

از تمامی دوستانی که در این مدت همراه من بودند، چه در مسائل کوچک و چه در مسائل بزرگ، صمیمانه و از اعماق قلبم سپاسگزارم.

از استاد راهنمای عزیزم، امین فرجی، و آقای دکتر ارفعی بابت حمایت و دلگرمی‌هاشان سپاسگزارم.

از تمامی دوستانی که در این مدت همراه من بودند، چه در مسائل کوچک و چه در مسائل بزرگ، صمیمانه و از اعماق قلبم سپاس‌گزارم.

از استاد راهنمای عزیزم، امین فرجی، و آقای دکتر ارفعی بابت حمایت و دلگرمی‌هاشان سپاس‌گزارم.

ممنون از این که همراهی ام کردید.

سوال؟ بحث؟ نظر؟

میان پرده: ارتباط پارامتر خشتی به ترمودینامیک

ارتباط پارامتر خشتی با کمیت های نافزون ور ترمودینامیکی را ببینیم.

تابع پارش نظریه ی میدان همدیس

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \sum_i q^{h_i - c/24} \bar{q}^{\bar{h}_i - c/24}$$

(جمع روی تمامی حالات دودمانی است و $q = e^{2\pi i \tau}$.)

عملگرهای $\begin{cases} \hat{H} = L_0 + \bar{L}_0 \\ \hat{J} = L_0 - \bar{L}_0 \end{cases}$ روی حالت $|h, \bar{h}\rangle$ ویژه مقدار $\begin{cases} E = h + \bar{h} \\ J = h - \bar{h} \end{cases}$ دارند.

$$Z \propto \sum_i e^{2\pi i \text{Re} \tau \overbrace{(h_i - \bar{h}_i)}^J} e^{-2\pi \text{Im} \tau \overbrace{(h_i + \bar{h}_i)}^E} \quad (20)$$

$\text{Im}(\tau)$ معکوس دماست و $\text{Re}(\tau)$ هم پتانسیل زاویه ای است. در فضا زمان، معنای این پارامترها به ترتیب معکوس دمای فضا و تکانه ی زاویه ای فضا است.

میان‌پرده: ارتباطِ پارامترِ خشتی به ترمودینامیک

ارتباطِ پارامترِ خشتی با کمیت‌های نافزون‌ورِ ترمودینامیکی را ببینیم.

تابع پارش نظریه‌ی میدان همدیس

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \sum_i q^{h_i - c/24} \bar{q}^{\bar{h}_i - c/24}$$

(جمع روی تمامی حالات دودمانی است و $q = e^{2\pi i \tau}$.)

عملگرهای $\begin{cases} \hat{H} = L. + \bar{L}. \\ \hat{J} = L. - \bar{L}. \end{cases}$ روی حالتِ $|h, \bar{h}\rangle$ ویژه‌مقدار دارند. $\begin{cases} E = h + \bar{h} \\ J = h - \bar{h} \end{cases}$

$$Z \propto \sum_i e^{2\pi i \text{Re} \tau \overbrace{(h_i - \bar{h}_i)}^J} e^{-2\pi \text{Im} \tau \overbrace{(h_i + \bar{h}_i)}^E} \quad (20)$$

$\text{Im}(\tau)$ معکوس دماست و $\text{Re}(\tau)$ هم پتانسیل زاویه‌ای است. در فضا‌زمان، معنای این پارامترها به ترتیب معکوس دمای فضا و تکانه‌ی زاویه‌ای فضا است.

میان‌پرده: ارتباط پارامترِ خشتی به ترمودینامیک

ارتباط پارامترِ خشتی با کمیت‌های نافزون‌ورِ ترمودینامیکی را ببینیم.

تابع پارش نظریه‌ی میدان همدیس

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \sum_i q^{h_i - c/24} \bar{q}^{\bar{h}_i - c/24}$$

(جمع روی تمامی حالات دودمانی است و $q = e^{2\pi i \tau}$.)

عملگرهای $\begin{cases} \hat{H} = L. + \bar{L}. \\ \hat{J} = L. - \bar{L}. \end{cases}$ روی حالتِ $|h, \bar{h}\rangle$ ویژه‌مقدارِ $\begin{cases} E = h + \bar{h} \\ J = h - \bar{h} \end{cases}$ دارند.

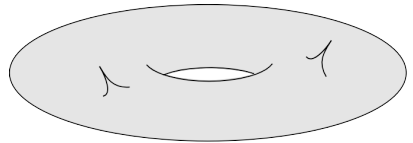
$$Z \propto \sum_i e^{2\pi i \text{Re} \tau \overbrace{(h_i - \bar{h}_i)}^J} e^{-2\pi \text{Im} \tau \overbrace{(h_i + \bar{h}_i)}^E} \quad (20)$$

$\text{Im}(\tau)$ معکوس دماست و $\text{Re}(\tau)$ هم پتانسیلِ زاویه‌ای است. در فضا‌زمان، معنای این پارامترها به ترتیب معکوس دمای فضا و تکانه‌ی زاویه‌ای فضا است.

اندکی درباره‌ی هندسه‌های تکینه‌ی مخروطی

فرآیند بالا $\leftarrow \Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_N$ هندسه‌های تکین.

نبود انگیزه‌ی فیزیکی کافی (!) در گذشته
[۱۵].



شکل: یک سهم تکین به انتگرال مسیر گرانژی

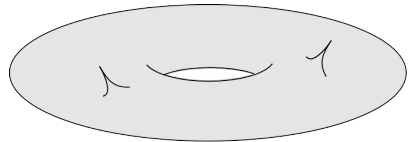
سهم‌های تکین $\leftarrow$ سهم زیرغالب
اما نواقص مهمی
را رفع می‌کنند.

مطابق دوگانی پاددوسیته/نظریه میدان همدیس مرزی [۱۲]، میدان‌های همدیس در پس‌زمینه‌ی
تکین $\equiv$ یک ذره‌ی جرم‌دار در فضا-زمان
پس تصویر تمام‌نگاری توجیه فیزیکی خوبی برای حضورشان فراهم می‌کند.

اندکی درباره‌ی هندسه‌های تکینه‌ی مخروطی

فرآیند بالا $\leftarrow \Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_N$ هندسه‌های تکین.

نبود انگیزه‌ی فیزیکی کافی (!) در گذشته
[۱۵].



شکل: یک سهم تکین به انتگرال مسیر گرانشی

سهم‌های تکین $\leftarrow$ سهم زیرغالب
اما نواقص مهمی
را رفع می‌کنند.

مطابق دوگانی پاددوسسته/نظریه میدان همدیس مرزی [۱۲]، میدان‌های همدیس در پس‌زمینه‌ی
تکین $\equiv$ یک ذره‌ی جرم‌دار در فضا-زمان
پس تصویر تمام‌نگاری توجیه فیزیکی خوبی برای حضورشان فراهم می‌کند.

ضمیمه‌ی اول: تقارن‌های مجانبی گرانش سه‌بعدی پاددوسیه‌ی خالص

شناخت فضای پاددوسیه‌ی سه‌بعدی $\xleftarrow{\text{با کمک}}$ جانشانی در $\mathbb{R}^{2,2}$

فضای $\mathbb{R}^{2,2}$ ، مجهز به مختصات (x, y, u, v) و متریک

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - du^2 - dv^2 \quad (21)$$

فضازمان پاددوسیه‌ی سه‌بعدی به‌عنوان یک زیرخمینه در فضای هدف

$$\text{AdS}_3 \equiv \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^{2,2} \mid u^2 + v^2 = \ell^2 + x^2 + y^2\} \quad (22)$$

پارامتر $\ell > 0$ شعاع پاددوسیه

شناخت فضای پاددوسیه‌ی سه‌بعدی $\xleftarrow{\text{با کمک}}$ جانشانی در $\mathbb{R}^{2,2}$

فضای $\mathbb{R}^{2,2}$ ، مجهز به مختصات (x, y, u, v) و متریک

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - du^2 - dv^2 \quad (21)$$

فضازمان پاددوسیه‌ی سه‌بعدی به‌عنوان یک زیرخمینه در فضای هدف

$$\text{AdS}_3 \equiv \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^{2,2} \mid u^2 + v^2 = \ell^2 + x^2 + y^2\} \quad (22)$$

پارامتر $\ell > 0$ شعاع پاددوسیه

شناخت فضای پاددوسیه‌ی سه‌بعدی $\xleftarrow{\text{با کمک}}$ جانشانی در $\mathbb{R}^{2,2}$

فضای $\mathbb{R}^{2,2}$ ، مجهز به مختصات (x, y, u, v) و متریک

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - du^2 - dv^2 \quad (21)$$

فضازمان پاددوسیه‌ی سه‌بعدی به‌عنوان یک زیرخمینه در فضای هدف

$$\text{AdS}_3 \equiv \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^{2,2} \mid u^2 + v^2 = \ell^2 + x^2 + y^2\} \quad (22)$$

پارامتر $\ell > 0$ شعاع پاددوسیه

شناخت فضای پاددوسیه‌ی سه‌بعدی $\xleftarrow{\text{با کمک}}$ جانشانی در $\mathbb{R}^{2,2}$

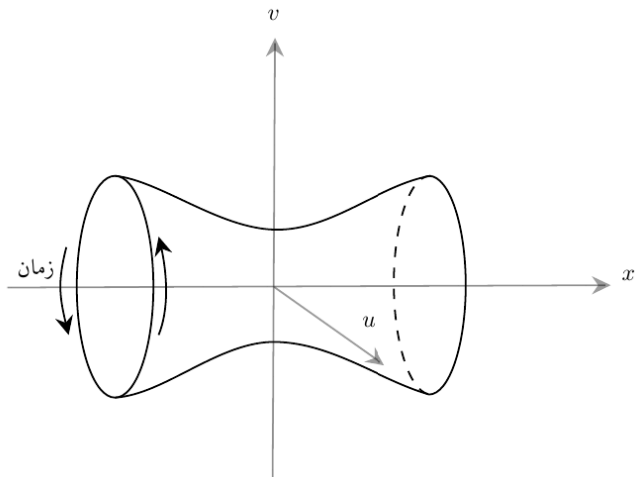
فضای $\mathbb{R}^{2,2}$ ، مجهز به مختصات (x, y, u, v) و متریک

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - du^2 - dv^2 \quad (21)$$

فضازمان پاددوسیه‌ی سه‌بعدی به‌عنوان یک زیرخمینه در فضای هدف

$$\text{AdS}_3 \equiv \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^{2,2} \mid u^2 + v^2 = \ell^2 + x^2 + y^2\} \quad (22)$$

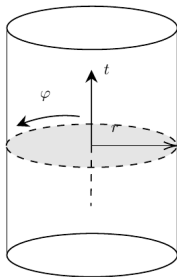
پارامتر $\ell > 0$ شعاع پاددوسیه



شکل: شمای فضای پاددوسیه‌ی سه‌بعدی، جانشانی شده در $\mathbb{R}^{2,2}$ - خم‌های بسته‌ی زمان‌گونه (!)

$$(x, y, u) \longrightarrow (t, r, \varphi)$$

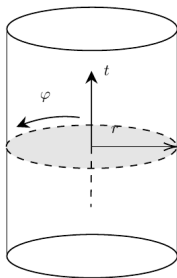
$$ds^2 = -(1 + r^2/\ell^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1 + r^2/\ell^2} + r^2 d\varphi^2 \quad (23)$$



شکل: در مختصاتِ سرتاسری، فضای پاددوسیه استوانه‌ای نامتناهی است که با متغیرهای (r, φ, t) مختصه‌بندی می‌شود.

$$(x, y, u) \longrightarrow (t, r, \varphi)$$

$$ds^2 = -(\mathbf{1} + r^2/\ell^2)dt^2 + \frac{dr^2}{\mathbf{1} + r^2/\ell^2} + r^2 d\varphi^2 \quad (23)$$



شکل: در مختصاتِ سرتاسری، فضای پاددوسیه استوانه‌ای نامتناهی است که با متغیرهای (r, φ, t) مختصه‌بندی می‌شود.

میدان‌های برداری کیلینگ فضای پاددوسیته سه‌بعدی

بردارهای کیلینگ فضای پاددوسیته $\xleftarrow{\text{با کمکی}}$ بردارهای کیلینگ فضای هدف^۸

$$\begin{aligned}\xi_1 &= u\partial_v - v\partial_u, & \xi_2 &= x\partial_y - y\partial_x, & \xi_3 &= u\partial_y + y\partial_u, \\ \xi_4 &= v\partial_x + x\partial_v, & \xi_5 &= u\partial_x + x\partial_u, & \xi_6 &= v\partial_y + y\partial_v.\end{aligned}\quad (24)$$

بازتعریف مولدهای جبر به شکل زیر

$$\begin{aligned}\ell_0 &\equiv \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2), & \bar{\ell}_0 &\equiv \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2), \\ \ell_1 &\equiv \frac{1}{2}(\xi_3 + \xi_4 - i\xi_5 + i\xi_6), & \bar{\ell}_1 &\equiv \frac{1}{2}(-\xi_3 + \xi_4 - i\xi_5 - i\xi_6), \\ \ell_{-1} &\equiv \frac{1}{2}(\xi_3 + \xi_4 + i\xi_5 - i\xi_6), & \bar{\ell}_{-1} &\equiv \frac{1}{2}(-\xi_3 + \xi_4 + i\xi_5 + i\xi_6),\end{aligned}\quad (25)$$

به جمع مستقیم $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ می‌رسیم $(m, n = 0, \pm 1)$.

$$i[\ell_m, \ell_n] = (m - n)\ell_{m+n}, \quad i[\bar{\ell}_m, \bar{\ell}_n] = (m - n)\bar{\ell}_{m+n}, \quad i[\ell_m, \bar{\ell}_n] = 0 \quad (26)$$

^۸ که تشکیل جبر $\mathfrak{so}(2, 2)$ می‌دهند.

میدان‌های برداری کیلینگ فضای پاددوسیته سه‌بعدی

بردارهای کیلینگ فضای پاددوسیته $\xleftarrow{\text{با کمکی}}$ بردارهای کیلینگ فضای هدف ^۸

$$\begin{aligned}\xi_1 &= u\partial_v - v\partial_u, & \xi_2 &= x\partial_y - y\partial_x, & \xi_3 &= u\partial_y + y\partial_u, \\ \xi_4 &= v\partial_x + x\partial_v, & \xi_5 &= u\partial_x + x\partial_u, & \xi_6 &= v\partial_y + y\partial_v.\end{aligned}\quad (24)$$

بازتعریف مولدهای جبر به شکل زیر

$$\begin{aligned}\ell_1 &\equiv \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2), & \bar{\ell}_1 &\equiv \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2), \\ \ell_2 &\equiv \frac{1}{2}(\xi_3 + \xi_4 - i\xi_5 + i\xi_6), & \bar{\ell}_2 &\equiv \frac{1}{2}(-\xi_3 + \xi_4 - i\xi_5 - i\xi_6), \\ \ell_{-1} &\equiv \frac{1}{2}(\xi_3 + \xi_4 + i\xi_5 - i\xi_6), & \bar{\ell}_{-1} &\equiv \frac{1}{2}(-\xi_3 + \xi_4 + i\xi_5 + i\xi_6),\end{aligned}\quad (25)$$

به جمع مستقیم $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ می‌رسیم $(m, n = 0, \pm 1)$.

$$i[\ell_m, \ell_n] = (m - n)\ell_{m+n}, \quad i[\bar{\ell}_m, \bar{\ell}_n] = (m - n)\bar{\ell}_{m+n}, \quad i[\ell_m, \bar{\ell}_n] = 0 \quad (26)$$

^۸ که تشکیل جبر $\mathfrak{so}(2, 2)$ می‌دهند.

میدان‌های برداری کیلینگ فضای پاددوسیته سه‌بعدی

بردارهای کیلینگ فضای پاددوسیته $\xleftarrow{\text{با کمکی}}$ بردارهای کیلینگ فضای هدف ^۸

$$\begin{aligned}\xi_1 &= u\partial_v - v\partial_u, & \xi_2 &= x\partial_y - y\partial_x, & \xi_3 &= u\partial_y + y\partial_u, \\ \xi_4 &= v\partial_x + x\partial_v, & \xi_5 &= u\partial_x + x\partial_u, & \xi_6 &= v\partial_y + y\partial_v.\end{aligned}\quad (24)$$

بازتعریف مولدهای جبر به شکل زیر

$$\begin{aligned}\ell_0 &\equiv \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2), & \bar{\ell}_0 &\equiv \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2), \\ \ell_1 &\equiv \frac{1}{2}(\xi_3 + \xi_4 - i\xi_5 + i\xi_6), & \bar{\ell}_1 &\equiv \frac{1}{2}(-\xi_3 + \xi_4 - i\xi_5 - i\xi_6), \\ \ell_{-1} &\equiv \frac{1}{2}(\xi_3 + \xi_4 + i\xi_5 - i\xi_6), & \bar{\ell}_{-1} &\equiv \frac{1}{2}(-\xi_3 + \xi_4 + i\xi_5 + i\xi_6),\end{aligned}\quad (25)$$

به جمع مستقیم $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ می‌رسیم $(m, n = 0, \pm 1)$.

$$i[\ell_m, \ell_n] = (m - n)\ell_{m+n}, \quad i[\bar{\ell}_m, \bar{\ell}_n] = (m - n)\bar{\ell}_{m+n}, \quad i[\ell_m, \bar{\ell}_n] = 0 \quad (26)$$

^۸ که تشکیل جبر $\mathfrak{so}(2, 2)$ می‌دهند.

میدان‌های برداری کیلینگ فضای پاددوستیته سه‌بعدی

بردارهای کیلینگ فضای پاددوستیته $\xrightarrow{\text{با کمک}}$ بردارهای کیلینگ فضای هدف ^۸

$$\begin{aligned}\xi_1 &= u\partial_v - v\partial_u, & \xi_2 &= x\partial_y - y\partial_x, & \xi_3 &= u\partial_y + y\partial_u, \\ \xi_4 &= v\partial_x + x\partial_v, & \xi_5 &= u\partial_x + x\partial_u, & \xi_6 &= v\partial_y + y\partial_v.\end{aligned}\quad (24)$$

بازتعریف مولدهای جبر به شکل زیر

$$\begin{aligned}\ell_+ &\equiv \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2), & \bar{\ell}_+ &\equiv \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2), \\ \ell_1 &\equiv \frac{1}{2}(\xi_3 + \xi_4 - i\xi_5 + i\xi_6), & \bar{\ell}_1 &\equiv \frac{1}{2}(-\xi_3 + \xi_4 - i\xi_5 - i\xi_6), \\ \ell_{-1} &\equiv \frac{1}{2}(\xi_3 + \xi_4 + i\xi_5 - i\xi_6), & \bar{\ell}_{-1} &\equiv \frac{1}{2}(-\xi_3 + \xi_4 + i\xi_5 + i\xi_6),\end{aligned}\quad (25)$$

به جمع مستقیم $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ می‌رسیم $(m, n = 0, \pm 1)$.

$$i[\ell_m, \ell_n] = (m - n)\ell_{m+n}, \quad i[\bar{\ell}_m, \bar{\ell}_n] = (m - n)\bar{\ell}_{m+n}, \quad i[\ell_m, \bar{\ell}_n] = 0 \quad (26)$$

^۸ که تشکیل جبر $\mathfrak{so}(2, 2)$ می‌دهند.

میدان‌های برداری کیلینگ فضای پاددوستیته سه‌بعدی

بردارهای کیلینگ فضای پاددوستیته $\xleftarrow{\text{با کمک}}$ بردارهای کیلینگ فضای هدف^۹

$$\begin{aligned}\xi_1 &= u\partial_v - v\partial_u, & \xi_2 &= x\partial_y - y\partial_x, & \xi_3 &= u\partial_y + y\partial_u, \\ \xi_4 &= v\partial_x + x\partial_v, & \xi_5 &= u\partial_x + x\partial_u, & \xi_6 &= v\partial_y + y\partial_v.\end{aligned}\quad (27)$$

بازتعریف مولدهای جبر به شکل زیر

$$\begin{aligned}\ell_0 &\equiv \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2), & \bar{\ell}_0 &\equiv \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2), \\ \ell_1 &\equiv \frac{1}{2}(\xi_3 + \xi_4 - i\xi_5 + i\xi_6), & \bar{\ell}_1 &\equiv \frac{1}{2}(-\xi_3 + \xi_4 - i\xi_5 - i\xi_6), \\ \ell_{-1} &\equiv \frac{1}{2}(\xi_3 + \xi_4 + i\xi_5 - i\xi_6), & \bar{\ell}_{-1} &\equiv \frac{1}{2}(-\xi_3 + \xi_4 + i\xi_5 + i\xi_6),\end{aligned}\quad (28)$$

به جمع مستقیم $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ می‌رسیم $(m, n = 0, \pm 1)$.

$$i[\ell_m, \ell_n] = (m - n)\ell_{m+n}, \quad i[\bar{\ell}_m, \bar{\ell}_n] = (m - n)\bar{\ell}_{m+n}, \quad i[\ell_m, \bar{\ell}_n] = 0 \quad \diamond \diamond \quad (29)$$

^۹ که تشکیل جبر $\mathfrak{so}(2, 2)$ می‌دهند.

جبر مولدهای تبدیلات طول پای فضا ← جبر مولدهای تقارنِ مجانبی.

ناحیه‌ی مجانبی ($r \rightarrow \infty$) ← پوسته‌ای استوانه‌ای شکل Λ
 متریکِ مجانبیِ فضا زمان ($x^\pm = \frac{t}{\ell} \pm \varphi$)

$$ds^2 \sim \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 - r^2 \left(\frac{dt^2}{\ell^2} - d\varphi^2 \right) = \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 - r^2 dx^+ dx^- \quad (30)$$

بردارهای کیلینگِ مجانبی (بردارهای کیلینگِ سرتاسری (۲۸)، اما در حدِ مجانبی ($r \rightarrow \infty$)

$$\ell_m \sim e^{imx^+} \partial_+ - \frac{1}{r} i m e^{imx^+} r \partial_r, \quad \bar{\ell}_m \sim e^{imx^-} \partial_- - \frac{1}{r} i m e^{imx^-} r \partial_r \quad (31)$$

◀ مولدهای تبدیلاتِ همدیس روی استوانه‌ی مجانبی.

◀ شرطِ افت Brown-Henneaux ← فضا زمان‌هایی که بردارهای کیلینگِ مجانبی‌شان برهم‌نهی شده‌ی (۳۱) است.

جبر مولدهای تبدیلات طول پای فضا ← جبر مولدهای تقارنِ مجانبی.

ناحیه‌ی مجانبی $(r \rightarrow \infty)$ ← پوسته‌ای استوانه‌ای شکل ۸
 متریکِ مجانبیِ فضا زمان $(x^\pm = \frac{t}{\ell} \pm \varphi)$

$$ds^2 \sim \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 - r^2 \left(\frac{dt^2}{\ell^2} - d\varphi^2 \right) = \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 - r^2 dx^+ dx^- \quad (30)$$

بردارهای کیلینگِ مجانبی (بردارهای کیلینگِ سرتاسری (۲۸)، اما در حدِ مجانبی $(r \rightarrow \infty)$

$$\ell_m \sim e^{imx^+} \partial_+ - \frac{1}{r} i m e^{imx^+} r \partial_r, \quad \bar{\ell}_m \sim e^{imx^-} \partial_- - \frac{1}{r} i m e^{imx^-} r \partial_r \quad (31)$$

◀ مولدهای تبدیلاتِ هم‌دیس روی استوانه‌ی مجانبی.

◀ شرطِ افت Brown-Henneaux ← فضا زمان‌هایی که بردارهای کیلینگِ مجانبی‌شان برهم‌نهی شده‌ی (۳۱) است.

جبر مولدهای تبدیلات طول پای فضا ← جبر مولدهای تقارنِ مجانبی.

ناحیه‌ی مجانبی $(r \rightarrow \infty)$ ← پوسته‌ای استوانه‌ای شکل ۸
 متریکِ مجانبیِ فضا زمان $(x^\pm = \frac{t}{\ell} \pm \varphi)$

$$ds^2 \sim \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 - r^2 \left(\frac{dt^2}{\ell^2} - d\varphi^2 \right) = \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 - r^2 dx^+ dx^- \quad (30)$$

بردارهای کیلینگِ مجانبی (بردارهای کیلینگِ سرتاسری (۲۸)، اما در حدِ مجانبی $(r \rightarrow \infty)$

$$\ell_m \sim e^{imx^+} \partial_+ - \frac{1}{r} i m e^{imx^+} r \partial_r, \quad \bar{\ell}_m \sim e^{imx^-} \partial_- - \frac{1}{r} i m e^{imx^-} r \partial_r \quad (31)$$

◀ مولدهای تبدیلاتِ همدیس روی استوانه‌ی مجانبی.

◀ شرطِ افت Brown-Henneaux ← فضا زمان‌هایی که بردارهای کیلینگِ مجانبی‌شان برهم‌نهی شده‌ی (۳۱) است.

جبر مولدهای تبدیلات طول پای فضا ← جبر مولدهای تقارنِ مجانبی.

ناحیه‌ی مجانبی ($r \rightarrow \infty$) ← پوسته‌ای استوانه‌ای شکل ۸
 متریک مجانبی فضا زمان ($x^\pm = \frac{t}{\ell} \pm \varphi$)

$$ds^2 \sim \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 - r^2 \left(\frac{dt^2}{\ell^2} - d\varphi^2 \right) = \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 - r^2 dx^+ dx^- \quad (30)$$

بردارهای کیلینگ مجانبی (بردارهای کیلینگِ سرتاسری (۲۸)، اما در حدِ مجانبی ($r \rightarrow \infty$)

$$\ell_m \sim e^{imx^+} \partial_+ - \frac{1}{\ell} i m e^{imx^+} r \partial_r, \quad \bar{\ell}_m \sim e^{imx^-} \partial_- - \frac{1}{\ell} i m e^{imx^-} r \partial_r \quad (31)$$

◀ مولدهای تبدیلاتِ هم‌دیس روی استوانه‌ی مجانبی.

◀ شرطِ افت Brown-Henneaux ← فضا زمان‌هایی که بردارهای کیلینگِ مجانبی‌شان برهم‌نهی شده‌ی (۳۱) است.

مقصود از فضا زمان های مجانباً پاددوسیه

تنها یک فضا زمان؟ یا دسته ای از فضا زمان ها؟
چه فضا زمان هایی در زمره ی فضا زمان های مجانباً پاددوسیه هستند؟

- اولین نامزد، خود فضا زمان پاددوسیه ی سه بعدی است.
 - فضا زمان هایی که در توده ی خود تکینگی مخروطی (چه کاستی، چه فزونی) دارند ^{۱۰}.
- نگاه دقیق تر $\leftarrow$ همسان سازی در مختصات سرتاسری ($\omega > 0$ و $A \in \mathbb{R}$).

$$(r, \varphi, t) \sim (r, \varphi + 4\pi\omega, t - 2\pi A) \quad (32)$$

همچنان خمینه ی اینشتین (به جز شاید در مرکز).

صورت آشنای متریک این فضا زمان

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r'^2}{\ell^2} \right) (dt' - Ad\varphi')^2 + \frac{dr'^2}{1 + r'^2/\ell^2} + 4\omega^2 r'^2 d\varphi'^2 \quad (33)$$

^{۱۰} مطابق تصویر تمام نگار، این فضا زمان ها، در توده ی خود ذره ای جرم دار دارند و این اختلال موضعی صورت مجانبی متریک را عوض نمی کند.

مقصود از فضا زمان های مجانباً پاددوسیه

تنها یک فضا زمان؟ یا دسته ای از فضا زمان ها؟
چه فضا زمان هایی در زمره ی فضا زمان های مجانباً پاددوسیه هستند؟

- اولین نامزد، خود فضا زمان پاددوسیه ی سه بعدی است.
- فضا زمان هایی که در توده ی خود تکینگی مخروطی (چه کاستی، چه فزونی) دارند^{۱۰}.
- نگاه دقیق تر $\longrightarrow$ همسان سازی در مختصات سرتاسری ($\omega > 0$ و $A \in \mathbb{R}$).

$$(r, \varphi, t) \sim (r, \varphi + 4\pi\omega, t - 2\pi A) \quad (32)$$

همچنان خمینه ی اینشتین (به جز شاید در مرکز).

صورت آشنای متریک این فضا زمان

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r'^2}{\ell^2} \right) (dt' - A d\varphi')^2 + \frac{dr'^2}{1 + r'^2/\ell^2} + 4\omega^2 r'^2 d\varphi'^2 \quad (33)$$

^{۱۰} مطابق تصویر تمام نگار، این فضا زمان ها، در توده ی خود ذره ای جرم دار دارند و این اختلال موضعی صورت مجانبی متریک را عوض نمی کند.

مقصود از فضا زمان های مجانباً پاددوسیته

تنها یک فضا زمان؟ یا دسته ای از فضا زمان ها؟
چه فضا زمان هایی در زمره ی فضا زمان های مجانباً پاددوسیته هستند؟

- اولین نامزد، خود فضا زمان پاددوسیته ی سه بعدی است.
- فضا زمان هایی که در توده ی خود تکینگی مخروطی (چه کاستی، چه فزونی) دارند^{۱۰}.
- نگاه دقیق تر $\longrightarrow$ همسان سازی در مختصات سرتاسری ($\omega > 0$ و $A \in \mathbb{R}$).

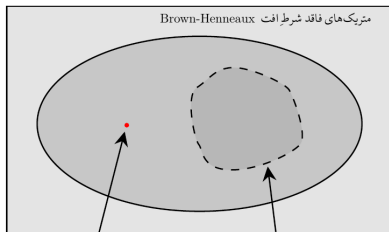
$$(r, \varphi, t) \sim (r, \varphi + 4\pi\omega, t - 2\pi A) \quad (32)$$

همچنان خمینه ی اینشتین (به جز شاید در مرکز).

صورت آشنای متریک این فضا زمان

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r'^2}{\ell^2} \right) (dt' - Ad\varphi')^2 + \frac{dr'^2}{1 + r'^2/\ell^2} + 4\omega^2 r'^2 d\varphi'^2 \quad (33)$$

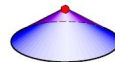
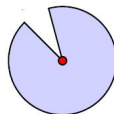
^{۱۰} مطابق تصویر تمام نگار، این فضا زمان ها، در توده ی خود ذره ای جرم دار دارند و این اختلال موضعی صورت مجانبی متریک را عوض نمی کند.



فضای پاددوسیه سه بعدی

مجموعه‌ی فضا‌زمان‌های
تکینگی مخروطی

شکل: مجموعه‌ی متریک‌ها و شرطِ افت
Brown-Henneaux



شکل: ساختن یک تکینگی مخروطی روی صفحه‌ی
اقلیدسی. معادله‌ی (۳۲)، تکینگی مخروطی
کشیده شده در فضا‌زمان. (قید روی A و w برای
دورکردن تکینگی از ناحیه‌ی مجانبی)

با گنجاندن این دو دسته فضا‌زمان در زمره فضا‌زمان‌های مجانباً پاددوسیه، حالا می‌رویم که
شرطِ افتِ Brown-Henneaux را تعریف کنیم.

فضازمان‌های مجانباً پاددوسیه $\subset$ فضازمان‌های دارای تکینگی مخروطی



ارث بردنِ تقارن‌های مجانبی

- ◀ تبدیلِ متریکِ (۳۳) تحتِ مولدهای $so(2, 2)$.
- ◀ شرطِ افتِ مولفه‌های متریک را می‌خوانیم.
- ◀ به تمامی متریک‌هایی که شرطِ افتِ فوق را داشته باشند، مجانباً پاددوسیه به معنای Brown-Henneaux می‌گوییم.
- گسترشِ فضازمان‌های دارای این شرطِ افت.
- تبدیلِ متریکِ (۳۳) تحتِ مولدهای $so(2, 2) \longleftarrow \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}$

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\varphi} & g_{rt} \\ g_{\varphi r} & g_{\varphi\varphi} & g_{\varphi t} \\ g_{tr} & g_{t\varphi} & g_{tt} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-2}) \\ \mathcal{O}(r^{-2}) & r^2 + \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(1) & -\frac{r^2}{\ell^2} + \mathcal{O}(1) \end{pmatrix} \quad (34)$$

جملاتِ قرمز رنگ با انتخابِ پیمانه‌ی ففرمن - گرام حذف می‌شوند.

فضازمان‌های مجانباً پاددوسیه $\subset$ فضازمان‌های دارای تکینگی مخروطی



ارث بردنِ تقارن‌های مجانبی

- ◀ تبدیلِ متریکِ (۳۳) تحتِ مولدهای $so(2, 2)$.
- ◀ شرطِ افتِ مولفه‌های متریک را می‌خوانیم.
- ◀ به تمامی متریک‌هایی که شرطِ افتِ فوق را داشته باشند، مجانباً پاددوسیه به معنای Brown-Henneaux می‌گوییم.
- گسترشِ فضازمان‌های دارای این شرطِ افت.

تبدیلِ متریکِ (۳۳) تحتِ مولدهای $so(2, 2)$ $\longleftarrow \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}$

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\varphi} & g_{rt} \\ g_{\varphi r} & g_{\varphi\varphi} & g_{\varphi t} \\ g_{tr} & g_{t\varphi} & g_{tt} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-2}) \\ \mathcal{O}(r^{-2}) & r^2 + \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(1) & -\frac{r^2}{\ell^2} + \mathcal{O}(1) \end{pmatrix} \quad (34)$$

جملاتِ قرمز رنگ با انتخابِ پیمانه‌ی ففرمن - گرام حذف می‌شوند.

فضازمان‌های مجانباً پاددوسیه $\subset$ فضازمان‌های دارای تکینگی مخروطی



ارث بردنِ تقارن‌های مجانبی

- ◀ تبدیلِ متریکِ (۳۳) تحتِ مولدهای $so(2, 2)$.
- ◀ شرطِ افتِ مولفه‌های متریک را می‌خوانیم.
- ◀ به تمامی متریک‌هایی که شرطِ افتِ فوق را داشته باشند، مجانباً پاددوسیه به معنای Brown-Henneaux می‌گوییم.
- گسترشِ فضازمان‌های دارای این شرطِ افت.
- تبدیلِ متریکِ (۳۳) تحتِ مولدهای $so(2, 2) \longleftarrow \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}$

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\varphi} & g_{rt} \\ g_{\varphi r} & g_{\varphi\varphi} & g_{\varphi t} \\ g_{tr} & g_{t\varphi} & g_{tt} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-2}) \\ \mathcal{O}(r^{-2}) & r^2 + \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(1) & -\frac{r^2}{\ell^2} + \mathcal{O}(1) \end{pmatrix} \quad (34)$$

جملاتِ قرمز رنگ با انتخابِ پیمانه‌ی ففرمن - گرام حذف می‌شوند.

تعریف ۱

$\mathcal{M}$ را خمینه‌ای سه‌بعدی شبه-ریمانی با متریک ds^2 در نظر بگیرید. مختصات (r, x^a) ($a = 0, 1$) را روی آن فرض کنید که برای $r > r_0$ معتبر است و مرز همدیس خمینه در حد $r \rightarrow \infty$ یک استوانه‌ی نورگونه است. اگر متریک در حد مجانبی $r \rightarrow \infty$ رفتار زیر را داشته باشد:

$$ds^2 \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 + (r^2 \eta_{ab} + \mathcal{O}(1)) dx^a dx^b \quad (35)$$

که در آن متریک دوبعدی مینکوفسکی روی استوانه است؛ می‌گوییم که خمینه‌ی $(\mathcal{M}, ds^2)$ یک خمینه‌ی مجانباً پاددوسیه به معنای *Brown-Henneaux* در پیمانه‌ی ففرمن-گرام است. ثابت کیهان شناختی این فضا زمان $\Lambda = -1/\ell^2$ است.

توجه

از این به بعد، وقتی در مورد متریک‌های فضای پاددوسیه‌ی سه‌بعدی حرف می‌زنیم، توجهمان فقط به متریک‌های دارای شرایط افت *Brown-Henneaux* است.

تعریف ۱

$\mathcal{M}$ را خمینه‌ای سه‌بعدی شبه-ریمانی با متریک ds^2 در نظر بگیرید. مختصات (r, x^a) ($a = 0, 1$) را روی آن فرض کنید که برای $r > r_0$ معتبر است و مرز همدیس خمینه در حد $r \rightarrow \infty$ یک استوانه‌ی نورگونه است. اگر متریک در حد مجانبی $r \rightarrow \infty$ رفتار زیر را داشته باشد:

$$ds^2 \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 + (r^2 \eta_{ab} + \mathcal{O}(1)) dx^a dx^b \quad (35)$$

که در آن متریک دوبعدی مینکوفسکی روی استوانه است؛ می‌گوییم که خمینه‌ی $(\mathcal{M}, ds^2)$ یک خمینه‌ی مجانباً پاددوسسته به معنای *Brown-Henneaux* در پیمانه‌ی ففرمن-گرام است. ثابت کیهان شناختی این فضا زمان $\Lambda = -1/\ell^2$ است.

توجه

از این به بعد، وقتی در مورد متریک‌های فضای پاددوسسته‌ی سه‌بعدی حرف می‌زنیم، توجهمان فقط به متریک‌های دارای شرایط افت *Brown-Henneaux* است.

تقارن‌های نظریه‌ی گرانشی (پیمانه‌ای) با شرطِ افت Brown-Henneaux — بررسیِ مجزا^{۱۱}.

بررسیِ میدان‌های برداریِ مولدِ وابرسی‌های حافظِ شرطِ افتِ Brown-Henneaux
به‌اختصار ← میدان‌های برداریِ کیلینگِ مجانبی (ξ).

به شرایطِ مقیدکننده‌ی ξ از تعریفِ (۳۵)

$$\mathcal{L}_\xi g_{rr} = \mathcal{L}_\xi g_{r\pm} = *, \quad \mathcal{L}_\xi g_{ab} = \mathcal{O}(1) \quad (a, b = \pm) \quad (36)$$

حلِ معادلاتِ دیفرانسیلِ مرتبه‌ی اول — یافتنِ صورتِ ξ.

^{۱۱} با تعیینِ شرطِ افت، برخی تقارن‌های پیمانه‌ای بدیهی می‌شوند؛ برخی هم که شرطِ افت را محترم نمی‌شمارد، از زمره‌ی تقارن‌ها کنار گذاشته می‌شوند.

تقارن‌های نظریه‌ی گرانشی (پیمانه‌ای) با شرطِ افت Brown-Henneaux — بررسیِ مجزا^{۱۱}.

بررسیِ میدان‌های برداریِ مولدِ وابرسی‌های حافظِ شرطِ افتِ Brown-Henneaux
به‌اختصار ← میدان‌های برداریِ کیلینگِ مجانبی (ξ).

به شرایطِ مقیدکننده‌ی ξ از تعریفِ (۳۵)

$$\mathcal{L}_\xi g_{rr} = \mathcal{L}_\xi g_{r\pm} = 0, \quad \mathcal{L}_\xi g_{ab} = \mathcal{O}(1) \quad (a, b = \pm) \quad (36)$$

حلِ معادلاتِ دیفرانسیلِ مرتبه‌ی اول — یافتنِ صورتِ ξ.

^{۱۱} با تعیینِ شرطِ افت، برخی تقارن‌های پیمانه‌ای بدیهی می‌شوند؛ برخی هم که شرطِ افت را محترم نمی‌شمارد، از زمره‌ی تقارن‌ها کنار گذاشته می‌شوند.

تقارن‌های نظریه‌ی گرانشی (پیمانه‌ای) با شرطِ افت Brown-Henneaux — بررسیِ مجزا^{۱۱}.

بررسیِ میدان‌های برداریِ مولدِ وابرسی‌های حافظِ شرطِ افتِ Brown-Henneaux
به‌اختصار ← میدان‌های برداریِ کیلینگِ مجانبی (ξ).

به شرایطِ مقیدکننده‌ی ξ از تعریفِ (۳۵)

$$\mathcal{L}_\xi g_{rr} = \mathcal{L}_\xi g_{r\pm} = 0, \quad \mathcal{L}_\xi g_{ab} = \mathcal{O}(1) \quad (a, b = \pm) \quad (36)$$

حلِ معادلاتِ دیفرانسیلِ مرتبه‌ی اول — یافتنِ صورتِ ξ.

^{۱۱} با تعیینِ شرطِ افت، برخی تقارن‌های پیمانه‌ای بدیهی می‌شوند؛ برخی هم که شرطِ افت را محترم نمی‌شمارد، از زمره‌ی تقارن‌ها کنار گذاشته می‌شوند.

بردارِ کیلینگِ مجانبیِ ξ به شکل زیر است.

(۳۷)

$$\xi = X(x^+) \partial_+ + \bar{X}(x^-) \partial_- - \frac{1}{r} (\partial_+ X(x^+) + \partial_- \bar{X}(x^-)) r \partial_r + (\text{زیر- غالب})$$

$$X(x^+), \bar{X}(x^-) \in \text{Diff}(S^1)$$

$X(x^+)$ و $X(x^-)$ دو تابع دلخواه و هموارِ 2π -متناوب هستند.
تصحیحات مرتبه‌ی پایین‌تر

$$\begin{aligned} & - \frac{\ell^2}{r} \partial_a (\partial_+ X + \partial_- \bar{X}) \int_r^{+\infty} \frac{dr'}{r'} g^{ab}(r', x^\pm) \partial_b \\ & = \frac{\ell^2}{r^2} [\partial_- (\partial_+ X + \partial_- \bar{X}) \partial_+ + \partial_+ (\partial_+ X + \partial_- \bar{X}) \partial_-] + \mathcal{O}(r^{-4}). \end{aligned} \quad (38)$$

بردار کیلینگِ مجانبیِ ξ به شکل زیر است.

(۳۹)

$$\xi = X(x^+) \partial_+ + \bar{X}(x^-) \partial_- - \frac{1}{r} (\partial_+ X(x^+) + \partial_- \bar{X}(x^-)) r \partial_r + (\text{زیر- غالب})$$

$$X(x^+), \bar{X}(x^-) \in \text{Diff}(S^1)$$

$X(x^+)$ و $X(x^-)$ دو تابع دلخواه و هموار 2π -متناوب هستند.
تصحیحات مرتبه‌ی پایین‌تر

$$\begin{aligned} & - \frac{\ell^2}{r} \partial_a (\partial_+ X + \partial_- \bar{X}) \int_r^{+\infty} \frac{dr'}{r'} g^{ab}(r', x^\pm) \partial_b \\ & = \frac{\ell^2}{r^2} [\partial_- (\partial_+ X + \partial_- \bar{X}) \partial_+ + \partial_+ (\partial_+ X + \partial_- \bar{X}) \partial_-] + \mathcal{O}(r^{-4}). \end{aligned} \quad (40)$$



جبر بردارهای کیلینگ مجانبی و گروه تقارنی مجانبی

$\xi_{(X, \bar{X})} \leftarrow$ بردار کیلینگ مجانبی تولیدشده با $X(x^+)$ و $\bar{X}(x^-)$ در (۳۹)
بازکردن مولدها برحسب مد فوریه شان

$$\ell_m \equiv \xi_{(e^{imx^+}, \cdot)}, \quad \bar{\ell}_m \equiv \xi_{(\cdot, e^{imx^-})}, \quad (41)$$

براکت لی این مولدها (تا جملات زیر- غالب) $\sim (29)$ (با این تفاوت که $m, n \in \mathbb{Z}$).

قضیه ۴

جبر تقارن های مجانبی گرانش مجانبی پاددوسیه ی سه بعدی با شرط افت *Brown-Henneaux*، جمع مستقیم دو جبر ویت $\mathfrak{witt} \oplus \mathfrak{witt}$ است و گروه تقارنی مجانبی $\text{Diff}^+(S^1) \times \text{Diff}^+(S^1)$ است که اعضایش به شکل زیر روی استوانه ی مجانبی عمل می کنند.

$$(x^+, x^-) \mapsto (f(x^+), \bar{f}(x^-)) \quad (42)$$

یعنی به شکل تبدیلات همدیس روی مختصات مخروط نوری استوانه ی مجانبی عمل می کنند.

جبر بردارهای کیلینگ مجانبی و گروه تقارنی مجانبی

$\xi_{(X, \bar{X})} \leftarrow$ بردار کیلینگ مجانبی تولیدشده با $X(x^+)$ و $\bar{X}(x^-)$ در (۳۹)
بازکردن مولدها بر حسب مد فوریه شان

$$\ell_m \equiv \xi_{(e^{imx^+}, \cdot)}, \quad \bar{\ell}_m \equiv \xi_{(\cdot, e^{imx^-})}, \quad (41)$$

براکت لی این مولدها (تا جملات زیر- غالب) $\sim (29)$ (با این تفاوت که $m, n \in \mathbb{Z}$).

قضیه ۴

جبر تقارن های مجانبی گرانش مجانبی پاددوسیتهی سه بعدی با شرط افت *Brown-Henneaux*، جمع مستقیم دو جبر ویت $\mathfrak{m}itt \oplus \mathfrak{m}itt$ است و گروه تقارنی مجانبی $\text{Diff}^+(S^1) \times \text{Diff}^+(S^1)$ است که اعضایش به شکل زیر روی استوانه ی مجانبی عمل می کنند.

$$(x^+, x^-) \mapsto (f(x^+), \bar{f}(x^-)) \quad (42)$$

یعنی به شکل تبدیلات همدیس روی مختصات مخروط نوری استوانه ی مجانبی عمل می کنند.

شرطِ افتِ Brown-Henneaux قابلِ کنترل‌ترین شرطِ افت است.
شرایطِ مرزی بدیل

● شرطِ مرزی آزاد [۲۰] ← تعمیم شرطِ Brown-Henneaux ← فاکتورِ همدیس پویا.

● شرایطِ مرزی دستیده (گرایش دستیده) [۱۹].

۳. تعمیم به میدان‌های مادی و اسپین‌های بالاتر.

فرا ترا از سطح کلاسیک:

● با کمک کوانتش هندسی^{۱۲}

۳ با کمک نظریه‌ی میدان‌های توپولوژیک [۱۴]

۱۲ در ادامه به اختصار در موردش صحبت می‌کنیم.

۱۳ قبلاً مفصلاً در یک ارائه این را بحث کردم و تمامی قدم‌ها را به دقت برداشتم

شرطِ افتِ Brown-Henneaux قابلِ کنترل‌ترین شرطِ افت است.
شرایطِ مرزی بدیل

- شرطِ مرزیِ آزاد [۲۰] — تعمیمِ شرطِ Brown-Henneaux — فاکتورِ همدیسِ پویا.
- شرایطِ مرزیِ دستیده (گرانِش دستیده) [۱۹].
- تعمیمِ به میدان‌های مادی و اسپین‌های بالاتر.

فرا تر از سطح کلاسیک:

^{۱۲} در ادامه به اختصار در موردش صحبت می‌کنیم.

۱۳ قبلاً مفصلاً در یک ارائه این را بحث کردم و تمامی قدم‌ها را به دقت برداشتم.

شرطِ افتِ Brown-Henneaux قابلِ کنترل‌ترین شرطِ افت است.
شرایطِ مرزی بدیل

- ۱ شرط مرزی آزاد [۲۰] ← تعمیم شرط Brown-Henneaux ← فاکتور همدیس پویا.
 - ۲ شرایط مرزی دستیده (گراش دستیده) [۱۹].
 - ۳ تعمیم به میدان‌های مادی و اسپین‌های بالاتر.
- فراتر از سطح کلاسیک:
- ۱ با کمک کوانتش هندسی^{۱۲}
 - ۲ با کوانتش نظریه‌ی پیمانه‌ای Chern-Simons و لطایف‌الحیل آن [۹]
 - ۳ با کمک نظریه‌ی میدان‌های توپولوژیک [۱۴]

۱۲ در ادامه به اختصار در موردش صحبت می‌کنیم.

١٣ قبل مفصلاً

شرطِ افتِ Brown-Henneaux قابلِ کنترل‌ترین شرطِ افت است.
شرایطِ مرزیِ بدیل

❶ شرطِ مرزیِ آزاد [۲۰] ← تعمیمِ شرطِ Brown-Henneaux ← فاکتورِ همدیسِ پویا.

❷ شرایطِ مرزیِ دستیده (گرانثِ دستیده) [۱۹].

❸ تعمیم به میدان‌های مادی و اسپین‌های بالاتر.

فراتر از سطحِ کلاسیک:

❶ با کمکِ کوانتشِ هندسی^{۱۲}

❷ با کوانتشِ نظریه‌ی پیمانه‌ای Chern-Simons و لطایف‌الحیلِ آن [۹]

❸ با کمکِ نظریه‌ی میدان‌های توپولوژیک [۱۴]

وجهِ دیگر ← ارتباطِ دینامیکی گرانثِ مجانباً پاددوسیته با نظریه‌میدانِ همدیسِ لیوویل [۱۳].^{۱۳}

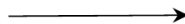
^{۱۲} در ادامه به اختصار در موردش صحبت می‌کنیم.

^{۱۳} قبلاً مفصلاً در یک ارائه این را بحث کردم و تمامی قدم‌ها را به‌دقت برداشتم.

گرانش اینشتین در فرمول‌بندی مرتبه اول
برحسب e و هم‌ستار اسپینی ω

+

شرطِ افتِ Brown-Henneaux
در پیمانه‌ی ففرمن-گرام



تعریف شرایط افت
ترجمه به زبان پیمانه‌ای

نظریه‌ی پیمانه‌ای Chern-Simons
با گروه پیمانه‌ای $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$



انتخاب پیمانه
شرطِ افتِ اول

نظریه‌ی پیمانه‌ای WZW دستیده
با گروه پیمانه‌ای $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$



کاهش هامیلتونی

نظریه‌ی پیمانه‌ای WZW
با گروه پیمانه‌ای $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$



شرطِ افتِ دوم
تجزیه گاوسی

نظریه میدان لیوویل روی مرزِ همدیس

پس جبر ویراسورو چه شد؟ 

! سلب مسئولیت: این همه‌ی ماجرا نیست!
برای اختصار، یک‌سری مطالب را حذف کردم.

- ◀ تعریف دقیقِ تقارن‌های مجانبی باکمکِ رده‌بندی بارهای سطحی [۱۸] ^{۱۴}
- ◀ جبر بارهای سطحی $\cong$ جبر ویراسورو
- ◀ قدم‌هایی هستند که نیاز به برداشتن دارند؛ نتیجه‌ی نهایی تمامی این قدم‌ها

$$\{Q_{(X,\cdot)}[p,\bar{p}], Q_{(Y,\cdot)}[p,\bar{p}]\} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left(X\partial_+ p + 2p\partial_+ X - \frac{c}{12} \partial_+^3 X \right) Y(x^+) \quad (43)$$

$$= Q_{([X,Y],\cdot)}[p,\bar{p}] + c\,c(X,Y)$$

^{۱۴} این کارها نیاز به پیش‌نیازهای ریاضی دارد.

پس جبر ویراسورو چه شد؟ 

سلب مسئولیت: این همه‌ی ماجرا نیست! 
برای اختصار، یک‌سری مطالب را حذف کردم.

- ◀ تعریف دقیقِ تقارن‌های مجانبی باکمکِ رده‌بندی بارهای سطحی [۱۸] ^{۱۴}
- ◀ جبر بارهای سطحی $\cong$ جبر ویراسورو
- ◀ قدم‌هایی هستند که نیاز به برداشتن دارند؛ نتیجه‌ی نهایی تمامی این قدم‌ها

$$\{Q_{(X, \cdot)}[p, \bar{p}], Q_{(Y, \cdot)}[p, \bar{p}]\} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left(X \partial_+ p + 2p \partial_+ X - \frac{c}{12} \partial_+^3 X \right) Y(x^+) \quad (43)$$

$$= Q_{([X, Y], \cdot)}[p, \bar{p}] + c \, c(X, Y)$$

^{۱۴} این کارها نیاز به پیش‌نیازهای ریاضی دارد.

نگاهی به تقارن‌های مجانبی فضای مجانب تخت

تمامی حرفهای بالا را برای فضاها $\mathcal{J}$ یا $\mathcal{P}$ می‌شود تعمیم داد.
گروه تقارن‌های سرتاسری فضای تخت $\cong$ گروه پوانکاره.

$$i[j_m, j_n] = (m - n)j_{m+n}, \quad i[j_m, p_n] = (m - n)p_{m+n}, \quad i[p_m, p_n] = 0 \quad m, n = 0, \pm 1$$

جبر تقارن‌های فضای مجانب تخت $(\mathfrak{bms}_3, [\cdot, \cdot])$

گسترش به مفهوم $m, n \in \mathbb{Z}$.

جبر تقارن‌های مجانبی کوانتومی $\leftarrow$ توسعه‌ی مرکزی جبر $\mathfrak{bms}_3$.

$$i\{\mathcal{J}_m, \mathcal{J}_n\} = (m - n)\mathcal{J}_{m+n},$$

$$i\{\mathcal{J}_m, \mathcal{P}_n\} = (m - n)\mathcal{P}_{m+n} + \frac{c_2}{12}m^3\delta_{m+n,0}, \quad (44)$$

$$i\{\mathcal{P}_m, \mathcal{P}_n\} = 0$$

c_2 بار مرکزی فراچرخش‌ها.

نگاهی به تقارن‌های مجانبی فضای مجانب تخت

تمامی حرفهای بالا را برای فضا زمان‌های مجانب تخت یا دوسیه هم می‌شود تعمیم داد.
گروه تقارن‌های سرتاسری فضای تخت $\cong$ گروه پوانکاره.

$$i[j_m, j_n] = (m - n)j_{m+n}, \quad i[j_m, p_n] = (m - n)p_{m+n}, \quad i[p_m, p_n] = 0 \quad m, n = 0, \pm 1$$

جبر تقارن‌های فضای مجانب تخت $\mathfrak{bms}_3(5, 4) \cong$
گسترش به مفهوم $m, n \in \mathbb{Z}$.

جبر تقارن‌های مجانبی کوانتومی $\leftarrow$ توسعه‌ی مرکزی جبر $\mathfrak{bms}_3$.

$$\begin{aligned} i\{\mathcal{J}_m, \mathcal{J}_n\} &= (m - n)\mathcal{J}_{m+n}, \\ i\{\mathcal{J}_m, \mathcal{P}_n\} &= (m - n)\mathcal{P}_{m+n} + \frac{c_2}{12}m^3\delta_{m+n,0}, \\ i\{\mathcal{P}_m, \mathcal{P}_n\} &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

c_2 بار مرکزی فراچرخش‌ها.

نگاهی به تقارن‌های مجانبی فضای مجانب تخت

تمامی حرفهای بالا را برای فضاها $\mathcal{J}$ یا دو سیته هم می‌شود تعمیم داد.
گروه تقارن‌های سرتاسری فضای تخت $\cong$ گروه پوانکاره.

$$i[j_m, j_n] = (m - n)j_{m+n}, \quad i[j_m, p_n] = (m - n)p_{m+n}, \quad i[p_m, p_n] = 0 \quad m, n = 0, \pm 1$$

جبر تقارن‌های فضای مجانب تخت $(\mathfrak{bms}_3, [\cdot, \cdot]) \cong$
گسترش به مفهوم $m, n \in \mathbb{Z}$.

جبر تقارن‌های مجانبی کوانتومی $\leftarrow$ توسعه‌ی مرکزی جبر $\mathfrak{bms}_3$.

$$\begin{aligned} i\{\mathcal{J}_m, \mathcal{J}_n\} &= (m - n)\mathcal{J}_{m+n}, \\ i\{\mathcal{J}_m, \mathcal{P}_n\} &= (m - n)\mathcal{P}_{m+n} + \frac{c_2}{12}m^3\delta_{m+n,0}, \\ i\{\mathcal{P}_m, \mathcal{P}_n\} &= 0. \end{aligned} \quad (44)$$

c_2 بار مرکزی فراچرخش‌ها.

ضمیمه‌ی دوم: یک رهیافت به اصلاح نقایصِ طیف

نگاه به مسئله از چارچوب برنامه‌ی بوتسترپ همدیس.
با کمک ابزارهایی از بوتسترپ همدیس در مخروط نور [۱۶] ← رصد قسمت منفی طیف
← حالات مشکل ساز میدان همدیس ← نگاه به این سهم‌ها در گرانش.

حالات با پیچش کاسته‌ی $T_n = -\frac{c-1}{2n}$ مشکل سازند ← اصلاح طیف با تعدادی حالت
نخستین با وزن همدیس و کمینه تبهگنی مشخص.

یک مشاهده‌ی جالب هم این است که هندسه‌های تکین مخروطی، منجر به سهم‌هایی دقیقاً
مشابه با این حالات پیچیده در تابع پارش گرانش کوانتومی می‌شوند.

با کنار هم گذاشتن این دو ایده، خیلی طبیعی است که سراغ سهم‌های اریفلد به تابع پارش
برویم ۱۵.

۱۵ یک انگیزه‌ی تمام‌نگاری هم داشتیم: این‌که حالات اریفلدی تمام‌نگار ذرات سنگین در فضا زمان هستند.

نگاه به مسئله از چارچوب برنامه‌ی بوتسترپ همدیس.
با کمک ابزارهایی از بوتسترپ همدیس در مخروط نور [۱۶] ← رصد قسمت منفی طیف
← حالات مشکل ساز میدان همدیس ← نگاه به این سهم‌ها در گرانش.

حالات با پیچش کاسته‌ی $T_n = -\frac{c-1}{24n^2}$ مشکل سازند ← اصلاح طیف با تعدادی حالت
نخستین با وزن همدیس و کمینه تبه‌گنی مشخص.

یک مشاهده‌ی جالب هم این است که هندسه‌های تکین مخروطی، منجر به سهم‌هایی دقیقاً
مشابه با این حالات پیچیده در تابع پارش گرانش کوانتومی می‌شوند.

با کنار هم گذاشتن این دو ایده، خیلی طبیعی است که سراغ سهم‌های اریفلد به تابع پارش
برویم ۱۵.

۱۵ یک انگیزه‌ی تمام‌نگاری هم داشتیم: این‌که حالات اریفلدی تمام‌نگار ذرات سنگین در فضا زمان هستند.

نگاه به مسئله از چارچوب برنامه‌ی بوتسترپ همدیس.
با کمک ابزارهایی از بوتسترپ همدیس در مخروط نور [۱۶] ← رصد قسمت منفی طیف
← حالات مشکل ساز میدان همدیس ← نگاه به این سهم‌ها در گرانش.

حالات با پیچش کاسته‌ی $T_n = -\frac{c-1}{24n^2}$ مشکل سازند ← اصلاح طیف با تعدادی حالت
نخستین با وزن همدیس و کمینه تبه‌گنی مشخص.

یک مشاهده‌ی جالب هم این است که هندسه‌های تکین مخروطی، منجر به سهم‌هایی دقیقاً
مشابه با این حالات پیچیده در تابع پارش گرانش کوانتومی می‌شوند.

با کنار هم گذاشتن این دو ایده، خیلی طبیعی است که سراغ سهم‌های اریفلد به تابع پارش
برویم ۱۵.

۱۵ یک انگیزه‌ی تمام‌نگاری هم داشتیم: این‌که حالات اریفلدی تمام‌نگار ذرات سنگین در فضا زمان هستند.

نگاه به مسئله از چارچوب برنامه‌ی بوتسترپ همدیس.

با کمک ابزارهایی از بوتسترپ همدیس در مخروط نور [۱۶] ← رصد قسمت منفی طیف

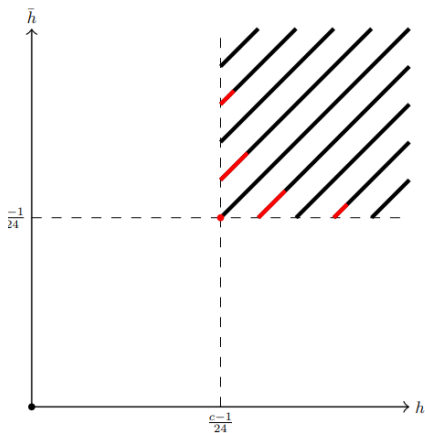
← حالات مشکل ساز میدان همدیس ← نگاه به این سهم‌ها در گرانش.

حالات با پیچش کاسته‌ی $T_n = -\frac{c-1}{4n}$ مشکل سازند $\leftarrow$ اصلاح طیف با تعدادی حالت نخستین با وزن همدیس و کمینه تبه‌گنی مشخص.

یک مشاهده‌ی جالب هم این است که هندسه‌های تکینِ مخروطی، منجر به سهم‌هایی دقیقاً مشابه با این حالات پیچیده در تابع پارش گرانث کوانتومی می‌شوند.

با کنار هم گذاشتن این دو ایده، خیلی طبیعی است که سراغ سهم‌های اربیفلد به تابع پارش برویم.^{۱۵}

^{۱۵} یک انگیزه‌ی تمام‌نگاری هم داشتیم: این‌که حالات اریف‌فندی تمام‌نگار ذرات سنگین در فضا زمان هستند.



شکل: حالات نخستین سهم در طیف MWK. طیف یکانی نیست و نواحی قرمز رنگ دقیقاً حالاتی هستند که چگالی حالات را منفی می‌کنند.

افزودن سهم‌های تکینه‌ی مخروطی

$$|\widetilde{\Psi}\rangle = |\text{circle with two red arcs}\rangle + |\text{figure-eight with two red arcs}\rangle + |\text{figure-eight with two red arcs}\rangle + \dots$$

شکل: تابع موج کوانتومی به عنوان ترکیبی خطی از هندسه‌های مختلف فضا زمان اما ایندفعه با تکینگی

با افزودن حالات اربیفلدی به انتگرال مسیر گرانشی، اصلاح را می‌بینیم.
از فرض خمینه بودن فرینه‌های کلاسیک جدا می‌شویم و سراغ سهم‌های اربیفلدی می‌رویم.

بنابراین، جمع روی هندسه‌ها حالا شامل دو سهم جدید است.

◀ اینستتون‌های گرانشی که خارج قسمتی شده‌ی فضای پاددوسیته‌ی گرمایی به زیرگروه گسسته‌ی $\mathbb{Z}_N$ هستند.

◀ اینستتون‌های گرانشی که خارج قسمتی شده‌ی سیاه‌چاله‌های خانواده‌ی $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ به زیرگروه گسسته‌ی $\mathbb{Z}_N$ هستند.

افزودن سهم‌های تکینه‌ی مخروطی

$$|\widetilde{\Psi}\rangle = |\text{circle with two red arcs}\rangle + |\text{figure-eight with two red arcs}\rangle + |\text{double figure-eight with two red arcs}\rangle + \dots$$

شکل: تابع موج کوانتومی به عنوان ترکیبی خطی از هندسه‌های مختلف فضا زمان اما ایندفعه با تکینگی

با افزودن حالات اربیفلدی به انتگرال مسیر گرانشی، اصلاح را می‌بینیم.
از فرض خمینه بودن فرینه‌های کلاسیک جدا می‌شویم و سراغ سهم‌های اربیفلدی می‌رویم.

بنابراین، جمع روی هندسه‌ها حالا شامل دو سهم جدید است.

◀ اینستتون‌های گرانشی که خارج قسمتی شده‌ی فضای پاددوسیته‌ی گرمایی به زیرگروه گسسته‌ی $\mathbb{Z}_N$ هستند.

◀ اینستتون‌های گرانشی که خارج قسمتی شده‌ی سیاه‌چاله‌های خانواده‌ی $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ به زیرگروه گسسته‌ی $\mathbb{Z}_N$ هستند.

افزودن سهم‌های تکینه‌ی مخروطی

$$|\widetilde{\Psi}\rangle = |\text{circle with cut}\rangle + |\text{figure-eight}\rangle + |\text{double figure-eight}\rangle + \dots$$

شکل: تابع موج کوانتومی به عنوان ترکیبی خطی از هندسه‌های مختلف فضا زمان اما ایندفعه با تکینگی

با افزودن حالات اربیفلدی به انتگرال مسیر گرانشی، اصلاح را می‌بینیم.
از فرض خمینه بودن فرینه‌های کلاسیک جدا می‌شویم و سراغ سهم‌های اربیفلدی می‌رویم.

بنابراین، جمع روی هندسه‌ها حالا شامل دو سهم جدید است.

◀ اینستنتون‌های گرانشی که خارج قسمتی شده‌ی فضای پاددوسیته‌ی گرمایی به زیرگروه گسسته‌ی $\mathbb{Z}_N$ هستند.

◀ اینستنتون‌های گرانشی که خارج قسمتی شده‌ی سیاه‌چاله‌های خانواده‌ی $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ به زیرگروه گسسته‌ی $\mathbb{Z}_N$ هستند.

افزودن سهم‌های تکینه‌ی مخروطی

$$|\widetilde{\Psi}\rangle = |\text{circle with two red arcs}\rangle + |\text{figure-eight with two red arcs}\rangle + |\text{figure-eight with two red arcs}\rangle + \dots$$

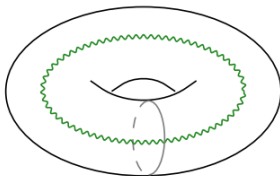
شکل: تابع موج کوانتومی به عنوان ترکیبی خطی از هندسه‌های مختلف فضا زمان اما ایندفعه با تکینگی

با افزودن حالات اربیفلدی به انتگرال مسیر گرانشی، اصلاح را می‌بینیم.
از فرض خمینه بودن فرینه‌های کلاسیک جدا می‌شویم و سراغ سهم‌های اربیفلدی می‌رویم.

بنابراین، جمع روی هندسه‌ها حالا شامل دو سهم جدید است.

◀ اینستنتون‌های گرانشی که خارج قسمتی شده‌ی فضای پاددوسیته‌ی گرمایی به زیرگروه گسسته‌ی $\mathbb{Z}_N$ هستند.

◀ اینستنتون‌های گرانشی که خارج قسمتی شده‌ی سیاه‌چاله‌های خانواده‌ی $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ به زیرگروه گسسته‌ی $\mathbb{Z}_N$ هستند.



شکل: سهم‌های اریفلدی، همان هندسه‌های شکل ۴ با تکنیکی مخروطی در توده هستند (زیگزاگ سبز) توجه کنید که این سهم‌ها همچنان فرینه‌ی کلاسیک هستند و بسط انتگرال مسیر حولشان معنی دارد.

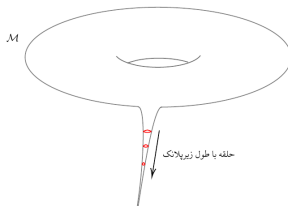
با انجام کارهایی مشابه $\longleftrightarrow$ با منتظم‌سازی بیشتر سهم اریفلدی به تابع پارش [۱۷] .

$$Z_{1\text{-loop}}^{(N)} = \frac{(q\bar{q})^{-\frac{1}{24N^2} \frac{3\ell}{2G_N}}}{|\eta(\tau)|^2} \quad (45)$$

و می‌توانیم با تحلیل طیف جدید، با معکوس تبدیل لاپلاس، ببینیم که طیف مثبت شده است .

پرکردن یک حفره (!)

حالا که سهم‌های تکین را داریم وارد کار می‌کنیم، چرا سراغ سهم‌های دارای تیزی نمی‌رویم؟ به شکل زیر نگاه کنید.

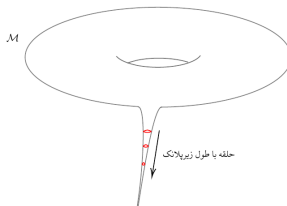


شکل: حلقه با طول به دلخواه کوچک حول نقطه‌ی سوراخ شده.

جواب این است که حلقه‌های همولوژی که طولشان از اندازه‌ی دلخواهی کوچکتر شود، اما حلقه‌ی بدیهی نباشند، پیامدهای خیلی زیان‌باری برای فیزیک فرابنفش دارند. بعد از منتظم کردن سهم این خمینه‌ها مشاهده می‌شود که انگار که با همان خمینه‌ی هموار اولیه سروکار داریم.

پركردن يك حفره (!)

حالا كه سهم‌هاى تكين را داريم واردِ كار مى‌كنيم، چرا سراغِ سهم‌هاى داراى تيزى نمى‌رويم؟ به شكلِ زير نگاه كنيد.



شكل: حلقه با طول به دلخواه كوچك حول نقطه‌ى سوراخ شده.

جواب اين است كه حلقه‌هاى همولوژى كه طولشان از اندازه‌ى دلخواه‌ى كوچكتر شود، اما حلقه‌ى بديه‌ى نباشند، پيامدهاى خيلى زيان‌بارى براى فيزيك فرابنفش دارند. بعد از منتظم كردن سهم اين خمينه‌ها مشاهده مى‌شود كه انگار كه با همان خمينه‌ى هموار اوليه سروكار داريم.

- [1] Brown, J. & Henneaux, M.
Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity. *Commun. Math. Phys.* 104 pp. 207-226 (1986)
- [2] Teitelboim, C.
Gravitation and Hamiltonian Structure in Two Space-Time Dimensions. *Phys. Lett. B.* 126 pp. 41-45 (1983)
- [3] Jackiw, R.
Lower Dimensional Gravity. *Nucl. Phys. B.* 252 pp. 343-356 (1985)
- [4] Bondi, H., Burg, M. & Metzner, A.
Gravitational waves in general relativity. Waves from axisymmetric isolated systems. *Proc. Roy. Soc. Lond. A.*

- [5] Sachs, R.
Asymptotic Symmetries in Gravitational Theory. Phys. Rev.
128, 2851-2864 (1962,12)
- [6] Alekseev, A. & Shatashvili, S.
Path integral quantization of the coadjoint orbits of the
virasoro group and 2-d gravity. Nuclear Physics B. **323**,
719-733 (1989)
- [7] Witten, E.
Coadjoint Orbits of the Virasoro Group. Commun. Math.
Phys. **114** pp. 1 (1988)
- [8] Krasnov, K.
On holomorphic factorization in asymptotically AdS 3D
gravity. Classical And Quantum Gravity. **20**, 4015-4042
(2003,8)

- [9] Kim, J. & Porrati, M.
On a Canonical Quantization of 3D Anti de Sitter Pure Gravity. (2015)
- [10] S. W. Hawking
Quantum Gravity and path integrals *PhysRevD.18.1747* (1978)
- [11] Giombi, S., Maloney, A. & Yin, X.
One-loop partition functions of 3D gravity. *Journal Of High Energy Physics.* **2008**, 007-007 (2008,8)
- [12] Fujita, M., Takayanagi, T. & Tonni, E.
Aspects of AdS/BCFT. *Journal Of High Energy Physics.* **2011** (2011,11)
- [13] Donnay, L.
Asymptotic dynamics of three-dimensional gravity. (2016)

- [14] Collier, S., Eberhardt, L. & Zhang, M.
Solving 3d gravity with Virasoro TQFT. *SciPost Physics*. **15**
(2023,10),
- [15] Krasnov, K.
Three-dimensional gravity, point particles and Liouville
theory. *Classical And Quantum Gravity*. **18**, 1291-1304
(2001,3)
- [16] Benjamin, N., Ooguri, H., Shao, S. & Wang, Y.
Light-cone modular bootstrap and pure gravity. *Physical
Review D*. **100** (2019,9)
- [17] Benjamin, N., Collier, S. & Maloney, A.
Pure Gravity and Conical Defects. (2020)

- [18] Barnich, G. & Troessaert, C.
Aspects of the BMS/CFT correspondence. Journal Of High Energy Physics. **2010** (2010,5)
- [19] Compère, G., Song, W. & Strominger, A.
New boundary conditions for AdS_3 . Journal Of High Energy Physics. **2013** (2013,5)
- [20] Troessaert, C.
Enhanced asymptotic symmetry algebra of AdS_3 . Journal Of High Energy Physics. **2013** (2013,8),